

# Teorema de Wick e Diagramas de Feynman

(1)

Apresentaremos agora o formalismo de expansão perturbativa através de diagramas de Feynman. Esse formalismo é fortemente ancorado em importantes teoremas como o teorema de Gell-Mann e Low e o teorema de Wick, aplicados a funções de Green temporalmente ordenadas.

Teorema de Gell-Mann e Low: Consideremos o seguinte Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + e^{-\eta|t|} \hat{H}_1 \quad \text{onde } \eta \text{ é uma quantidade positiva pequena}$$

Para  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ , temos  $\hat{H} \rightarrow \hat{H}_0$  (problema solúvel)

Na rep. de interações, a evolução temporal de um estado será dada por:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_\eta(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle \quad \text{onde}$$
$$\hat{U}_\eta(t, t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n e^{-\eta(|t_1| + \dots + |t_n|)} T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_n)].$$

$T[\dots]$   $\rightarrow$  operador de ordenação temporal. Se  $|\Phi_0\rangle$  é algum estado de  $H_0$  ( $H_0|\Phi_0\rangle = E_0|\Phi_0\rangle$ ). Para  $\underline{t \rightarrow -\infty}$   $\hat{H} \rightarrow H_0$  então

$$|\Psi_S(t_0 \rightarrow -\infty)\rangle = e^{-iE_0 t_0} |\Phi_0\rangle \quad \text{e} \quad |\Psi_I(t_0)\rangle = e^{i\hat{H}_0 t_0} |\Psi_S(t_0)\rangle = |\Phi_0\rangle$$

Em  $\underline{t=0}$  temos a seguinte relação:

$$|\Psi_I(0)\rangle = |\Psi_S(0)\rangle = \hat{U}_\eta(0, -\infty) |\Phi_0\rangle$$

"Adiabatic switch on"

O teorema de Gell-Mann e Low<sup>(\*)</sup> diz o seguinte:

Se, em toda a ordem de teoria de perturbação, pudermos definir

$$a \text{ quantidade } \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{U_\eta(0, -\infty) |\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | U_\eta(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle} = \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \quad (\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle \neq 0)$$

então  $|\Psi_0\rangle$  será um auto-estado de  $\hat{H} = \hat{H}_0 + e^{-\eta|t|} \hat{H}_1$ .

$$\frac{\hat{H} |\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} = E \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \quad (\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle \neq 0 !)$$

Dizemos então que o estado  $|\Psi_0\rangle$  se desenvolve adiabaticamente de  $|\Phi_0\rangle$

<sup>\*</sup>(M. Gell-Mann, F. Low, Phys. Rev. 84 350 (1951)). Provas: vide Fetter & Walecka cap. 3 sec. 6

Funções de Green Temporalmente ordenadas: Sendo  $\psi_0^+(\vec{r}, t)$  e  $\psi_0(\vec{r}, t)$

operadores de campo, definimos a seguinte função de Green a  $T=0$ :  
na rep. de Heisenberg

$$G_{\sigma\sigma'}^{(T=0)}(\vec{r}, t, \vec{r}', t') \equiv \frac{-i \langle \Psi_0 | T(\psi_0(\vec{r}, t) \psi_0^+(\vec{r}', t')) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle}$$

onde

$$T(\psi_0(\vec{r}, t) \psi_0^+(\vec{r}', t')) \equiv \begin{cases} \psi_0(\vec{r}, t) \psi_0^+(\vec{r}', t') & t > t' \\ \pm \psi_0^+(\vec{r}', t') \psi_0(\vec{r}, t) & t < t' \end{cases}$$

é o operador de ordenamento temporal e  $|\Psi_0\rangle$  é o estado fundamental (na rep. de Heisenberg) do sistema interagente:

$$\underline{H |\Psi_0\rangle = E |\Psi_0\rangle} \quad ; \quad \underline{\psi_0(\vec{r}, t) = e^{iHt} \psi_0(\vec{r}) e^{-iHt}}$$

## Teorema de Wick

(3)

Para o cálculo da função de Green  $G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$  é necessário o conhecimento de estado fundamental  $|\Psi_0\rangle$  (de muitas vezes) de  $\hat{H}$  no caso interagente. Um método poderoso (embora com limitações) é o cálculo de  $G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$  em teoria de perturbações a partir das funções de Green  $G^{(0)}(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$  que envolvem o estado fundamental  $|\Psi_0^{(0)}\rangle$  de  $\hat{H}_0$ , em geral conhecidas.

Esse método perturbativo se baseia no Teorema de Wick, que relaciona  $G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$  a uma expansão envolvendo várias  $G^{(0)}$ .

O passo inicial para enunciar o teorema é mostrar que  $G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$  pode ser escrita na forma:  $[X \equiv (\vec{r}, t)]$  ( $t \geq t'$ )

$$i G_{\alpha\beta\alpha'}(X, X') = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \frac{\langle \Phi_0 | T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_n) \Psi_0^{\dagger}(X) \Psi_0^{\dagger}(X')] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | U_H(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle} \quad (\text{I})$$

onde os operadores de campo estão escritos na Representação de Interação.

Essa expressão vem da seguinte identidade para um operador  $\hat{O}$ :

$$\frac{\langle \Psi_0 | \hat{O}_H(t) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} = \frac{\langle \Phi_0 | \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n e^{-i(\sum_{j=1}^n |t_j|)} T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_n) \hat{O}_I(t)] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | U_H(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle} \quad (\text{II})$$

$$\hat{O}_H(t) = e^{iHt} \hat{O} e^{-iHt} \quad (\text{Heisenberg}); \quad \hat{O}_I(t) = e^{-iH_0 t} \hat{O} e^{-iH_0 t}$$

Prova: Pelo teorema de Gell-Mann e Low temos

$$\frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} = \frac{U_H(0, \pm\infty) |\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | U_H(0, \pm\infty) |\Phi_0\rangle}$$

de modo que, para  $t_0 \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle}{|\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle|^2} = \frac{\langle \Phi_0 | U_H^+(0, \infty) U_H(0, -\infty) |\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | U_H(0, \infty) |\Phi_0\rangle^* \langle \Phi_0 | U_H(0, -\infty) |\Phi_0\rangle} = \begin{pmatrix} U(t_1, t_0) = U(t_0, t) \\ U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\langle \Phi_0 | U_H(\infty, 0) U_H(0, -\infty) |\Phi_0\rangle}{|\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle|^2} = \frac{\langle \Phi_0 | U_H(+\infty, -\infty) |\Phi_0\rangle}{|\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle|^2}$$

Por outro lado:  $(\hat{O}_H(t) = U(0, t) \hat{O}_I(t) U(t, 0))$

$$\frac{\langle \Psi_0 | \hat{O}_H(t) | \Psi_0 \rangle}{|\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle|^2} = \frac{\langle \Phi_0 | U_H(\infty, 0) U_H(0, t) \hat{O}_I(t) U_H(t, 0) U_H(0, -\infty) |\Phi_0\rangle}{|\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle|^2}$$

$$= \frac{\langle \Phi_0 | U_H(\infty, t) \hat{O}_I(t) U_H(t, -\infty) |\Phi_0\rangle}{|\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle|^2}$$

$$\frac{\langle \Psi_0 | \hat{O}_H(t) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} = \frac{\langle \Phi_0 | U_H(\infty, t) \hat{O}_I(t) U_H(t, -\infty) |\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | U_H(+\infty, -\infty) |\Phi_0\rangle}$$

calculamos o denominador:

$$U_H(\infty, t) \hat{O}_I(t) U_H(t, -\infty) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i)^l}{l!} \int_t^{\infty} dt_1 \dots dt_l T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_l)]_x e^{-\eta(|t_1| + \dots + |t_l|)} \hat{O}_I(t)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^t dt_1 \dots dt_m T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_m)]_x e^{-\eta(|t_1| + \dots + |t_m|)} \quad (III)$$

O passo final é mostrar a integral da expressão (II) é igual à integral da expressão (III). A integral em (II) pode ser dividida para um dado  $n$ , em  $l$  fatores onde  $t_e > t$  e  $m$  fatores onde  $t_m < t$  tal que  $l+m=n$ . Há  $\frac{n!}{l!m!}$  maneiras de fazer isso para cada  $l, m$ .

Mas, nesses casos, teremos:

$$T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_n) \hat{O}_I(t)] = T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_l)] \hat{O}_I(t) T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_m)]$$

$\underbrace{\sum_{l,m} \frac{n!}{l!m!}}_{n \text{ fatores}} \quad \underbrace{l \text{ fatores } t_e > t}_{\text{}} \quad \underbrace{m \text{ fatores } t > t_m}_{\text{}}$

Logo, a soma em (I) fica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{n,m+l}}_{\text{restringe a operar } n=m+l} \frac{n!}{l!m!} \int_t^{\infty} dt_1 \dots dt_l e^{-\eta(|t_1| + \dots + |t_l|)} T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_l)] \times \hat{O}_I(t) \times \int_{-\infty}^t dt_1 \dots dt_m e^{-\eta(|t_1| + \dots + |t_m|)} T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_m)]$$

$$= \left( \begin{matrix} \text{soma sobre } n \\ n \rightarrow m+l \\ (-i)^n = (-i)^m (-i)^l \end{matrix} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i)^l}{l!} \int_t^{\infty} dt_1 \dots dt_l e^{-\eta(|t_1| + \dots + |t_l|)} T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_l)] \times \hat{O}_I(t) \times \int_{-\infty}^t dt_1 \dots dt_m e^{-\eta(|t_1| + \dots + |t_m|)} T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_m)] = \text{(III)}$$

o que completa nossa prova.  $\checkmark$

A questão agora é calcular  $G(x, x')$  para um formato específico da interação  $\hat{H}_I$ . O caso mais interessante são termos quárticos (interação Coulombiana, por exemplo) na forma:

$$\hat{H}_I = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta\beta'} U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \psi_\alpha^\dagger(\vec{r}_1) \psi_\beta^\dagger(\vec{r}_2) \psi_{\beta'}(\vec{r}_2) \psi_{\alpha'}(\vec{r}_1) \quad \left( \text{soma em } \alpha, \alpha', \beta, \beta' \text{ subentendida} \right)$$

Definindo  $U_{\alpha\alpha'}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) \equiv U_{\alpha\alpha'}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$  (forma covariante),

a equação (I) fica escrita na forma:

$$iG_{\alpha\alpha'}(x, x') = \frac{i\tilde{G}_{\alpha\alpha'}(x, x')}{\langle \Phi | U_I(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle}$$

onde  $\left[ \begin{array}{l} \text{operador na Rep. de Interação} \\ \text{lembrando que tem uma } \delta(t_i - t_i') \text{ aqui} \end{array} \right]$

$$i\tilde{G}_{\alpha\alpha'}(x, x') = iG_{\alpha\alpha'}^{(0)}(x, x') + (-i) \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta\beta'} \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_1' U_{\alpha\alpha'}(x_1, x_1') \times \langle \Phi_0 | T[\psi_\alpha^\dagger(x_1) \psi_\beta^\dagger(x_1') \psi_{\beta'}(x_1') \psi_{\alpha'}(x_1) \psi_\beta(x) \psi_{\alpha'}^\dagger(x')] | \Phi_0 \rangle$$

$$+ (-i)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta\beta'} \sum_{\delta\delta'} \int d^4x_1 d^4x_1' d^4x_2 d^4x_2' U_{\alpha\alpha'}(x_1, x_1') U_{\delta\delta'}(x_2, x_2') \times$$

$$\langle \Phi_0 | T[\psi_\alpha^\dagger(x_1) \psi_\beta^\dagger(x_1') \psi_{\beta'}(x_1') \psi_\alpha(x_1) \psi_\delta^\dagger(x_2) \psi_\delta^\dagger(x_2') \psi_{\delta'}(x_2') \psi_\delta(x_2) \psi_\beta(x) \psi_{\alpha'}^\dagger(x')] | \Phi_0 \rangle$$

$$+ (n=3) \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots \quad (IV)$$

e assim por diante.

A primeira dificuldade técnica é calcular os valores esperados  $\langle \Phi_0 | T[... \text{muitos operadores}...] | \Phi_0 \rangle$ . Aí entra o Teorema de Wick. Em sua forma "fraca", ele diz que o valor esperado de um ordenamento temporal de  $n=2p$  operadores ( $p$  de criação e  $p$  de destruição) é igual à soma dos produtos dos valores esperados de ordenamentos de pares de operadores possíveis.

Um exemplo:

$$\langle \Phi_0 | T[\psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger \psi_{\beta'} \psi_{\alpha'}] | \Phi_0 \rangle = \overset{(-1)^2}{\langle \Phi_0 | T[\psi_\alpha^\dagger \psi_{\alpha'}] | \Phi_0 \rangle} \langle \Phi_0 | T[\psi_\beta^\dagger \psi_{\beta'}] | \Phi_0 \rangle$$

$$\overset{(-1)^1}{-} \langle \Phi_0 | T[\psi_\alpha^\dagger \psi_{\beta'}] | \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0 | T[\psi_\beta^\dagger \psi_{\alpha'}] | \Phi_0 \rangle$$

$$+ \underbrace{\langle \Phi_0 | T[\psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger] | \Phi_0 \rangle}_{= \text{zero}} \underbrace{\langle \Phi_0 | T[\psi_{\beta'} \psi_{\alpha'}] | \Phi_0 \rangle}_{= \text{zero}}$$

Os  sinais  que aparecem na frente dos produtos são dados, apenas no caso de operadores fermionicos (não bosônicos) por  $(-1)^p$  onde  $p$  é o número de permutações necessárias no ordenamento original para "parear" os operadores. (Por exemplo, no segundo termo  $\psi_\beta^\dagger \leftrightarrow \psi_{\beta'}$ ,  $\Rightarrow p=1$ . Já no primeiro termo:  $\psi_{\alpha'} \leftrightarrow \psi_{\beta'}$ ;  $\psi_\alpha^\dagger \leftrightarrow \psi_\beta^\dagger \Rightarrow p=2$ .)

A prova dessa versão do Teorema está feita (na linguagem de funções de Green) no livro de Bruus + Flensberg via Eq. de Movimento. No Fetter & Walecka <sup>(Sec 8)</sup> está feita a prova da versão "forte", que é uma identidade de operadores (e não uma propriedade de valor esperado).

O Teorema de Wick então nos permite "quebrar" os valores esperados dos termos da função de Green na Eq. (IV) em somas de produtos de funções de Green não interagente do tipo:

$$iG_{\beta\beta'}^{(n)}(x, x') = \langle \Phi_0 | T[\psi_\beta(x) \psi_{\beta'}^\dagger(x')] | \Phi_0 \rangle$$

Por exemplo, o termo de 1ª ordem ( $n=1$ ) fica: (faça você mesmo!)

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | T[\psi_\alpha^\dagger(x_1) \psi_\beta^\dagger(x'_1) \psi_{\beta'}(x'_1) \psi_\alpha(x_1) \psi_\beta(x) \psi_{\beta'}^\dagger(x')] | \Phi_0 \rangle = \\ \langle T[\psi_\beta(x) \psi_{\beta'}^\dagger(x')] \rangle_0 \cdot \left( \langle T[\psi_\alpha \psi_\alpha^\dagger] \rangle_0 \langle T[\psi_{\beta'} \psi_{\beta'}^\dagger] \rangle_0 - \langle T[\psi_{\beta'} \psi_\alpha^\dagger] \rangle_0 \langle T[\psi_\alpha \psi_{\beta'}^\dagger] \rangle_0 \right) \\ + \langle T[\psi_\beta(x) \psi_\alpha^\dagger(x_1)] \rangle_0 \left( - \langle T[\psi_{\beta'} \psi_{\beta'}^\dagger] \rangle_0 \langle T[\psi_\alpha \psi_\alpha^\dagger] \rangle_0 + \langle T[\psi_{\beta'} \psi_\alpha^\dagger] \rangle_0 \langle T[\psi_\alpha \psi_{\beta'}^\dagger] \rangle_0 \right) \\ - \langle T[\psi_\beta(x) \psi_{\beta'}^\dagger(x'_1)] \rangle_0 \left( - \langle T[\psi_\alpha \psi_\alpha^\dagger] \rangle_0 \langle T[\psi_{\beta'} \psi_{\beta'}^\dagger] \rangle_0 + \langle T[\psi_{\beta'} \psi_\alpha^\dagger] \rangle_0 \langle T[\psi_\alpha \psi_{\beta'}^\dagger] \rangle_0 \right) \end{aligned}$$

ou seja, até 1ª ordem termos

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\beta\beta'}(x, x') = iG_{\beta\beta'}^{(0)}(x, x') + (-i)^2 G_{\beta\beta'}^{(2)}(x, x') \left( \sum_{\alpha\alpha'} \int d^4x_1 \int d^4x'_1 \left[ \int d^4x_1 \int d^4x'_1 \left( G_{\alpha\beta}^{(0)}(x_1, x) U_{\beta\beta'}^{\alpha\alpha'}(x_1, x'_1) G_{\beta'\beta}^{(0)}(x'_1, x'_1) \right. \right. \right. \\ \left. \left. - G_{\alpha'\beta}(x_1, x'_1) U_{\beta\beta'}^{\alpha\alpha'}(x_1, x'_1) G_{\beta\alpha}^{(0)}(x'_1, x_1) \right) \right. \\ \left. + (-i)^2 \sum_{\alpha\alpha'} \int d^4x_1 \int d^4x'_1 \left( G_{\beta\alpha}^{(0)}(x, x_1) U_{\beta\beta'}^{\alpha\alpha'}(x_1, x'_1) G_{\alpha'\beta}^{(0)}(x_1, x'_1) G_{\beta'\alpha}^{(0)}(x'_1, x_1) \right) \right. \\ \left. - G_{\beta\alpha}^{(0)}(x, x_1) U_{\beta\beta'}^{\alpha\alpha'}(x_1, x'_1) G_{\beta'\beta}^{(0)}(x'_1, x'_1) G_{\alpha'\beta'}^{(0)}(x_1, x_1) \right) \\ + (-i)^2 \sum_{\alpha\alpha'} \int d^4x_1 \int d^4x'_1 \left( G_{\beta\beta}^{(0)}(x, x_1) G_{\beta'\alpha}^{(0)}(x'_1, x_1) U_{\beta\beta'}^{\alpha\alpha'}(x_1, x'_1) G_{\alpha'\beta'}^{(0)}(x_1, x'_1) \right. \\ \left. - G_{\beta\beta}^{(0)}(x, x_1) G_{\beta'\alpha}^{(0)}(x'_1, x'_1) U_{\beta\beta'}^{\alpha\alpha'}(x_1, x'_1) G_{\alpha'\beta}^{(0)}(x_1, x_1) \right) \\ \left. + \mathcal{O}(U^2) \right) \end{aligned} \tag{V}$$

$iG^{(n)} = \langle T[\psi\psi^\dagger] \rangle$



Escreveremos agora esse termo em uma representação gráfica onde adotamos a seguinte convenção:

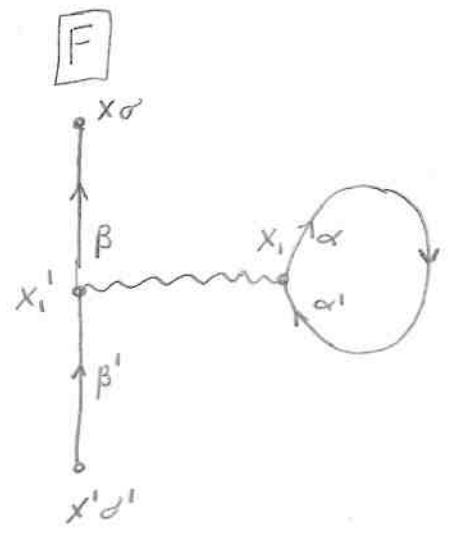
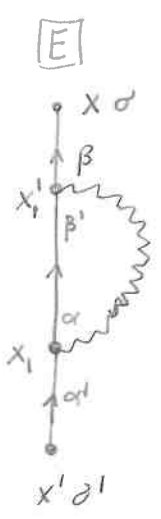
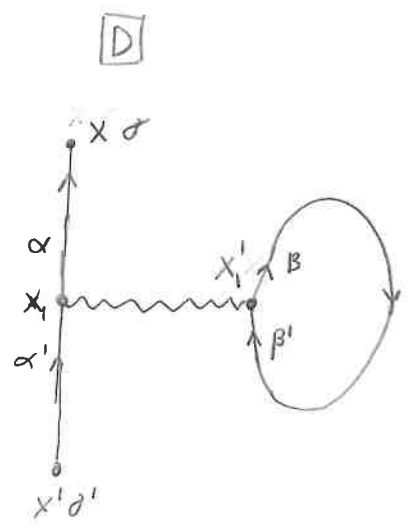
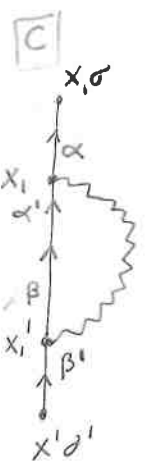
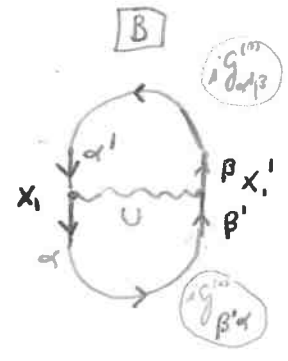
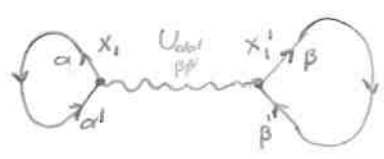
$$iG_{\alpha\beta}^{(0)}(x_1, x_2) \rightarrow$$



$$(-i)U_{\alpha\alpha' \beta\beta'}(x_A, x_B) \rightarrow$$



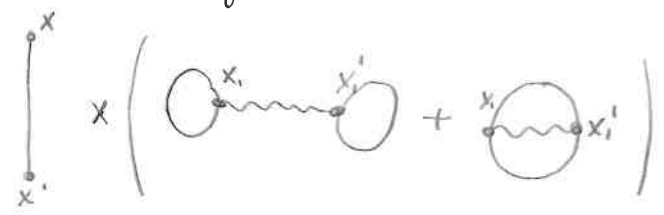
Os 6 termos de  $\tilde{G}(x, x')$  ( $x \equiv (\vec{r}, t)$ ) ficam então



Esses diagramas representam os termos na Eq. (V) se lembrarmos que a cada vértice corresponde a uma integral  $\int d^4x_i$  e que os diagramas  $\boxed{B}$ ,  $\boxed{D}$  e  $\boxed{F}$  contribuem com um sinal negativo. Não por acaso, esse diagrama tem um número ímpar de "circuitos fechados" fermionicos.

Alguns comentários:

- Os diagramas  $\boxed{A}$  e  $\boxed{B}$  tem linhas "desconectadas". Elas vem de termo  $iG_{\alpha\alpha'}^{(0)}(x, x')$  que aparecem fora da integral  $\int d^4x_i, d^4x'_i$ .
- Os diagramas  $\boxed{C}$  e  $\boxed{E}$  e  $\boxed{D}$  e  $\boxed{F}$  são idênticos, diferindo apenas pela troca  $x_i \leftrightarrow x'_i, \alpha \leftrightarrow \beta$  ( $\alpha' \leftrightarrow \beta'$ ). Na verdade, os termos representados por esses diagramas são iguais pois o potencial  $U(x_i, x'_i)$  é simétrico em relação à troca  $x \leftrightarrow x'$  e a soma nos índices dá conta das outras trocas. Assim, o fator "1/2" se cancela e podemos considerar apenas uma contribuição <sup>de cada</sup> (ex  $\boxed{E}$  e  $\boxed{D}$ )
- Voltando aos diagrama "desconectados": podemos "escrever"  $\boxed{A} + \boxed{B}$  como:



O termo fatorado entre parênteses são, na verdade, as contribuições em 1ª ordem para o denominador da Eq. (I):

$$\langle \Phi_0 | U(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle = 1 + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots$$

Isso vem do fato de que  $\langle U(\infty, -\infty) \rangle_0$  tem uma estrutura parecida a  $\tilde{G}_{\partial\partial'}$  com a importante diferença que os operadores  $\psi_\alpha(x)$  e  $\psi_{\beta'}^\dagger(x')$  não entram na ordem temporal:

$$\begin{aligned} \langle U(\infty, -\infty) \rangle_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \langle T[\hat{H}_1(t_1) \dots \hat{H}_1(t_n)] \rangle_0 e^{-i(t_1 + \dots + t_n)} \\ &= 1 + \frac{(-i)}{2} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ \beta\beta'}} \int d^4x, d^4x' U_{\alpha\alpha', \beta\beta'}^{(2)} \langle T[\psi_\alpha^\dagger(x) \psi_\beta^\dagger(x') \psi_{\beta'}(x') \psi_{\alpha'}(x)] \rangle_0 + \dots \\ &\quad \downarrow \text{Teorema de Wick} \\ &= 1 + \frac{(-i)}{2} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ \beta\beta'}} \int d^4x, d^4x' \left( iG_{\alpha\alpha'}^{(0)}(x, x') U(x, x') iG_{\beta\beta'}^{(0)}(x', x') \right. \\ &\quad \left. - iG_{\alpha'\beta}^{(0)}(x, x') U(x, x') iG_{\beta'\alpha}^{(0)}(x', x') \right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( \text{Diagrama 1} \right) - \frac{1}{2} \left( \text{Diagrama 2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Dessa forma, o termo fatorado de diagramas desconectados em  $\tilde{G}_{\partial\partial'}(x, x')$  "cancela" com o denominador de  $G_{\partial\partial'} = \frac{\tilde{G}_{\partial\partial'}}{\langle U(\infty, -\infty) \rangle_0}$

- Um último comentário: para diagramas de ordem  $n \geq 1$ , temos  $2n$  variáveis de integração mudas  $(x_n, x_n')$  que podem ser permutadas (em pares) de  $n!$  maneiras diferentes mas que dão o mesmo resultado. Isso cancela o fator  $\frac{1}{n!}$  e escolhemos apenas uma "ordem" dos pares  $(x_n, x_n')$  para etiquetar os  $n$  pares de pontos desse diagrama. (Note que isso é independente da troca  $x_n \leftrightarrow x_n'$  em cada par que cancela o fator  $1/2$ ).

Estamos, por fim, prontos para enunciar as regras para construção de diagramas de Feynman de ordem  $n$  para o cálculo de  $G_{\alpha\alpha'}^{(n)}(x, x')$ :

1) Desenhe todos os diagramas conectados topologicamente distintos com  $n$  linhas de interação e com início em  $x'd'$  e final em  $x\sigma$ . Associe  $x_n\alpha_n$  e  $x'_n\alpha'_n$  aos  $n$  pares de vértices (ou  $x_\ell\alpha_\ell$   $\ell=1, \dots, 2n$  aos  $2n$  vértices)

2) A cada linha contínua de  $x_{\ell'}\alpha_{\ell'}$  a  $x_\ell\alpha_\ell$ , associe

$$i G_{\alpha\alpha'}^{(0)}(x_\ell, x_{\ell'})$$

e a cada linha de interação entre

$$x_\ell \begin{matrix} (\alpha_\ell) \\ (\alpha'_\ell) \end{matrix} \text{ e } x_{\ell'} \begin{matrix} (\alpha_{\ell'}) \\ (\alpha'_{\ell'}) \end{matrix} \text{ associe } \begin{matrix} -i U_{\alpha_\ell \alpha'_{\ell'}}(x_\ell, x_{\ell'}) \\ \beta_{\ell'} \beta'_{\ell'} \end{matrix}$$

3) Integre sobre todas as coordenadas internas  $x_\ell$  e some sobre todos os índices internos  $\alpha_\ell$ .

4) Multiplique o diagrama por  $(-1)^F$  onde  $F$  é o número de circuitos fechados fermiônicos.

5) A cada função de Green com índices temporais iguais (ex.

$$G_{\alpha\alpha'}^{(n)}(x_1, x_1) = G_{\alpha\alpha'}^{(n)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_1, t_1) \text{ faça } G_{\alpha\alpha'}^{(n)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_1, t_1^+).$$

(Operadores de criação aparecem à esquerda após o ordenamento temporal a tempos iguais)

# Diagramas de Feynman na Rep. de $(\vec{k}, \omega)$

Para sistemas homogêneos ou quase homogêneos (leis-re, metais) é mais conveniente trabalhar no espaço  $\vec{k}$ . Também, na maioria dos casos, é útil trabalhar no espaço de frequência  $\omega$ .

Fazemos então a transformada de Fourier "dupla"

$(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{k}, \omega)$  nas funções de Green:

$$G_{\alpha\alpha'}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{i\vec{k}\cdot(x-x')} G_{\alpha\alpha'}(k)$$

onde  $k = \vec{k}, \omega$  é um quadri-vetor covariante de modo que

$$\boxed{k \cdot x \equiv \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t} \Rightarrow \boxed{G_{\alpha\alpha'}(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') - i\omega(t-t')} G_{\alpha\alpha'}(\vec{k}, \omega)}$$

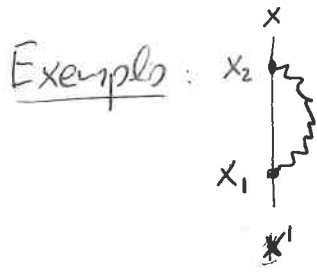
Nessa representação, o potencial  $U$  fica na forma:

$$U_{\alpha\alpha'}(x, x') = U_{\alpha\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}') \delta(t-t') \quad (\text{Coulombiano e "instantâneo"})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{i\vec{k}\cdot(x-x')} U_{\alpha\alpha'}(k) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} U_{\alpha\alpha'}(\vec{q}) \delta(t-t')$$

$$\left( \text{Já que } \delta(t-t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \right) \text{ sendo } \boxed{U_{\alpha\alpha'}(\vec{q}) = \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} U_{\alpha\alpha'}(\vec{r})}$$

Como ficam as diagramas nesse caso?



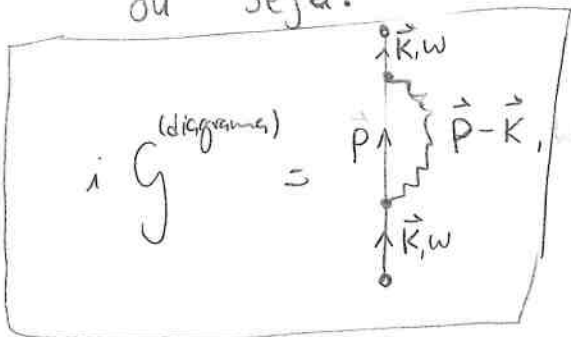
$$i G^{(Diagram)}(x, x') = - \int d^4 x_1 d^4 x_2 G^{(0)}(x, x_2) G^{(0)}(x_2, x_1) U(x_1, x_2) G^{(0)}(x_1, x')$$

$$i G^{(Diagram)} = - \int d^4 x_1 d^4 x_2 \int \frac{d^4 q d^4 k d^4 p d^4 p'}{(2\pi)^{16}} e^{+iq(x_1-x_2)} e^{+ik(x_1-x')} e^{+ip(x_2-x_1)} e^{+ip'(x-x_2)} \times U(q) G^{(0)}(k) G^{(0)}(p) G^{(0)}(p')$$

$$= - \int \frac{d^4 q d^4 k d^4 p d^4 p'}{(2\pi)^{16}} (2\pi)^4 \delta^4(p-q-k) (2\pi)^4 \delta^4(p-q-p') \times U(q) G^{(0)}(k) G^{(0)}(p) G^{(0)}(p')$$

$$= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} U(p-k) G^{(0)}(k) G^{(0)}(p) G^{(0)}(k)$$

ou seja:



de modo que os vértices ficam na forma (momento e conservado em cada vértice):

