

Supercondutividade e Teoria BCS

Instabilidade de Cooper

Mostramos anteriormente que o efeito combinado da interação elétron-fônon e a renormalização RPA no modelo de jellium levam a uma interação efetiva entre os elétrons $V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\vec{q}, i\omega_n)$ dada por:

$$\text{---} \rightarrow V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(\vec{q}, i\omega_n) = W^{\text{RPA}}(\vec{q}, i\omega_n) \frac{(i\omega_n)^2}{(i\omega_n)^2 - \omega_q^2}$$

que é atrativa para $(i\omega_n) < \omega_q$ onde $\omega_q = \frac{\Omega}{\sqrt{\epsilon^{\text{RPA}}(q)}} \approx v_s q$ p/ $q \rightarrow 0$

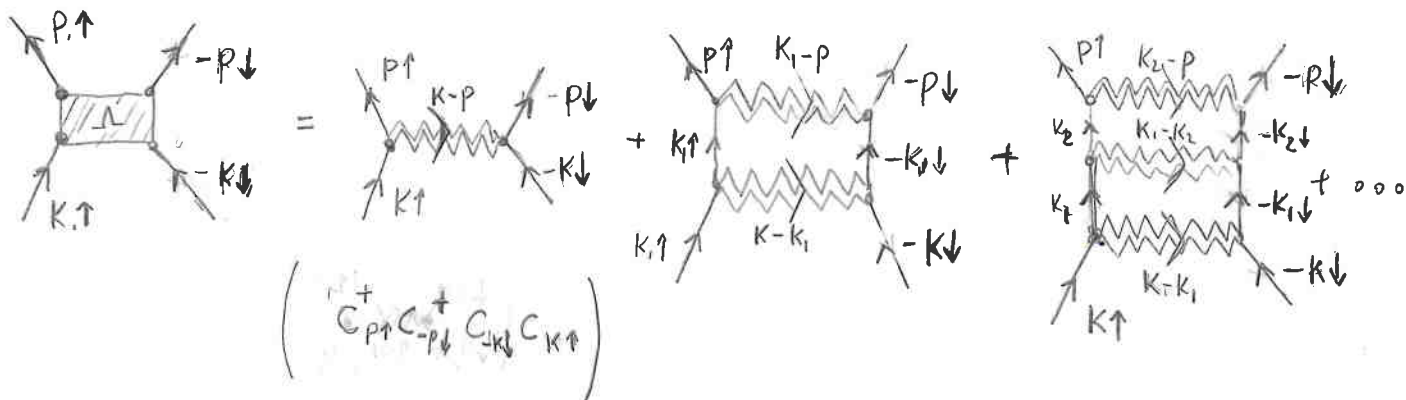
tem uma dispersão tipo fônon acústico.

Essa interação efetiva tem consequências importantes e não triviais.

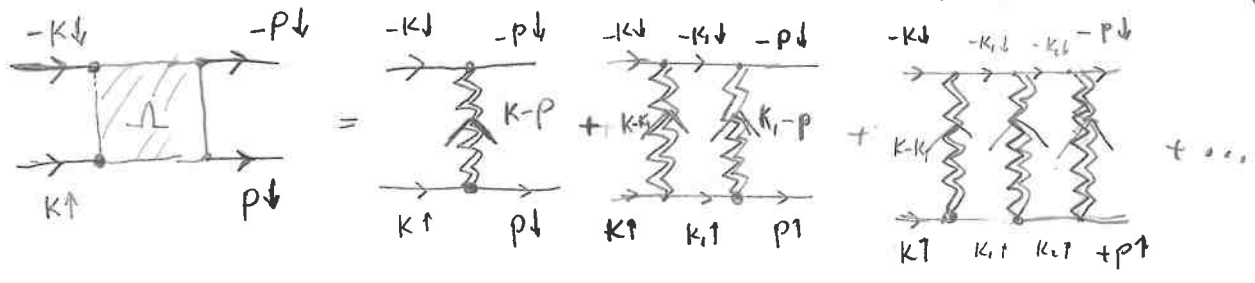
A primeira delas é a tendência do sistema de formar par de elétrons de momento e spin trocados (relacionados por uma "inversão temporal") abaixo de uma certa temperatura. Esse fenômeno é denominado "instabilidade de Cooper" e pode ser ilustrado diagramaticamente.

Consideremos a interação entre par de elétrons com momento (e spins) opostos através de $V_{\text{eff}}^{\text{RPA}}(q)$ na forma: $(K = \vec{k}, i\omega_n)$

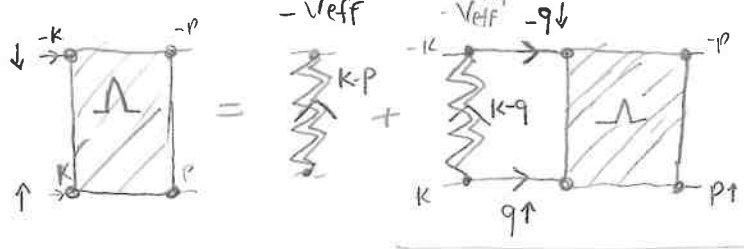
Fônon



Escreito de outra forma a função $\Lambda(K, P)$ é um vértice de interação entre par de elétrons: um par se destrói ($C_{K\uparrow} C_{-K\downarrow}$) e outro criado ($C_{P\uparrow}^\dagger C_{-P\downarrow}^\dagger$):



ou, removendo as "pernas", tem a cara de uma auto-energia:



ou seja

$$\Lambda(K, P) = -V_{eff}^{RPA}(K-P) + \frac{1}{V_0 \beta} \sum_q V_{eff}^{RPA}(K-Q) G_{\uparrow}^{(0)}(Q) G_{\downarrow}^{(0)}(-Q) \Lambda(Q, P)$$

Para simplificar (bastante) o cálculo, tomamos a seguinte forma para

V_{eff}^{RPA} no cálculo de Λ : $V_{eff}^{RPA}(Q) \rightarrow -V \Theta((i\eta_n) - \omega_D)$ com base nas

seguintes considerações:

1) Como ω_q tem dispersão de fônons acústicos, podemos usar um modelo de Debye com uma densidade de fônons $D_{Debye}(\epsilon) \propto \epsilon^2$ e com "preenchimento" até $\omega_q = \omega_D$ (ω_D é um parâmetro do modelo agora).

2) Para frequências abaixo de ω_q , a interação será atractiva. No entanto, a densidade de fônons vai rapidamente a zero, de modo que só terá uma contribuição efetiva para V_{eff}^{RPA} dos fônons com $\omega_q \approx \omega_D$. Logo, a substituímos $\omega_q \rightarrow \omega_D$ em V_{eff}^{RPA} .

3) Para $\omega > \omega_D$ $V_{eff}^{RPA}(\vec{q}, \omega)$ é, essencialmente, $V(\vec{q}, \omega)$, e conhecemos o resultado: "blindagem" eletrônica. Queremos focar em $V_{eff} < 0$, logo $V \rightarrow V_{eff}^{RPA} - W^{RPA}$

Consideramos então a interação efetiva como sendo:

$$V_{\text{eff}}^{BCS}(\vec{q}, iq_n) = \begin{cases} -V & |iq_n| < \omega_D \\ 0 & |iq_n| > \omega_D \end{cases}$$

de modo que a soma sobre $q = (\vec{q}, iq_n)$ fica:

$$\Lambda(\vec{k}, \vec{p}) = V + \frac{1}{\beta} \sum_{iq_n}^{\omega_D} \frac{1}{V_{2d}} \sum_{\vec{q}} V G_{\uparrow}^{(0)}(\vec{q}, iq_n) G_{\downarrow}^{(0)}(-\vec{q}, -iq_n) \Lambda(\vec{q}, \vec{p})$$

que nos depende mais de \vec{k}, iq_n . Por conservação de momento (e consistência), Λ também nos pode depender de \vec{p} , de modo que teremos como sendo uma constante.

Resolvendo para Λ (algebricamente), obtemos:

$$\Lambda = \frac{V}{1 - \frac{V}{V_{2d}\beta} \sum_{iq_n}^{\omega_D} \sum_{\vec{q}} G_{\uparrow}^{(0)}(\vec{q}, iq_n) G_{\downarrow}^{(0)}(-\vec{q}, -iq_n)}$$

sendo $G_{\sigma}^{(0)}(\vec{q}, iq_n) = \frac{1}{iq_n - \epsilon_q}$
 $q_n = \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\beta}(2n + 1)$
 $\epsilon_q \propto q^2$

podemos fazer a soma do denominador:

$$S(\beta) = \frac{V}{\beta} \sum_{iq_n}^{\omega_D} \frac{1}{V_{2d}} \sum_{\vec{q}} \frac{1}{(iq_n - \epsilon_q) [(-iq_n) - \epsilon_q]} = \left(\frac{1}{V} \sum_{\vec{q}} \rightarrow \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \rightarrow \int d(\epsilon) dE = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d(\epsilon) dE \right)$$

$$= \frac{V}{\beta} \sum_{(iq_n)^c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{q_n^2 + E^2} \cdot \frac{d(\epsilon F)}{2} = \frac{1}{2} V d(\epsilon F) \sum_{n=0}^{n_D-1} \frac{V}{\pi(2n+1)}$$

onde $n_D = \frac{\beta \omega_D - 1}{2\pi}$
 $n_D - 1 = \frac{\beta \omega_D - 2}{2\pi}$

$$S(\beta) \approx \frac{V d(\epsilon F)}{2} \ln \left(4 \frac{\beta \omega_D}{2\pi} \right)$$

Assim, existe uma temperatura crítica T_c tal que $S=1$ e o denominador de Λ vai a zero, ou seja, $\Lambda \rightarrow \infty$. Essa temperatura será dada por $S(\beta_c) = 1$ ou seja:

$$\frac{\beta_c \omega_D}{2\pi} = e^{\frac{2}{Vd(\epsilon_F)}} \Rightarrow K_B T_c = \frac{\hbar \omega_D}{2\pi} e^{-\frac{2}{Vd(\epsilon_F)}} \quad \text{nesse modelo simples}$$

Para $\beta \omega_D \ll 1$, nós temos $\Lambda \approx V$ pois $S(\beta) \ll 1$ e é repulsiva. Isso equivale a $T > T_c$. Para $T \rightarrow T_c$, Λ diverge (e depois muda de sinal para $T < T_c$). Essa divergência no vertice entre pares é chamada de "instabilidade de Cooper" e tem uma interpretação física clara: sinaliza uma transição de fase para um novo estado onde é energeticamente favorável aos elétrons formarem pares bosônicos

$C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+$ o que efetivamente elimina o caráter metálico (fermiônico) do sistema. Esse será o estado supercondutor.

Note que T_c pode ser pequena, muito menor que $\hbar \omega_D$ devido ao fator exponencial $e^{-\frac{2}{Vd(\epsilon_F)}}$. Tipicamente em metais, temos $\hbar \omega_D \approx 100K$ enquanto que $T_c \sim 1K$.

Teoria BCS: Pares de Cooper

Os pares de Cooper são os "elementos básicos" (as "quasipartículas")

da teoria BCS que descreve a supercondutividade. Escrever esse estado como:

$$\Psi_{cp}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{|\vec{k}| > k_F} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_2} C_{\vec{k}\uparrow}^\dagger C_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger |\Psi_0\rangle = \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \Psi_{cp} \rangle$$

onde

$$|\Psi_{cp}\rangle = \sum_{|\vec{k}| > k_F} a_{\vec{k}} |CP_{\vec{k}}\rangle \quad ; \quad |CP_{\vec{k}}\rangle = C_{\vec{k}\uparrow}^\dagger C_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger |\Psi_0\rangle$$

Se introduzirmos um Hamiltoniano $H_{cp} = H_0 + V_{eff}^{BCS}$ tal que

$$H_0 = \sum_{|\vec{k}'| > k_F} (\epsilon_{\vec{k}'} - \mu) C_{\vec{k}'\sigma}^\dagger C_{\vec{k}'\sigma} = \sum_{|\vec{k}'| > k_F} \bar{\epsilon}_{\vec{k}'} C_{\vec{k}'\sigma}^\dagger C_{\vec{k}'\sigma} \quad (\text{a } T=0 \quad \mu = E_F)$$

nos informa das energias de excitação (elétrons) ocupando estados "vazios" sendo $\bar{\epsilon}_{\vec{k}'}$ medido acima da energia de Fermi. Temos que

$$H_0 |CP_{\vec{k}}\rangle = 2 \bar{\epsilon}_{\vec{k}} |CP_{\vec{k}}\rangle, \text{ que mede a energia cinética do par.}$$

Para o potencial $V_{eff}^{BCS} = -V \theta(\omega - \omega_D)$ temos

$$\langle CP_{\vec{k}'} | V_{eff}^{BCS} | CP_{\vec{k}} \rangle = -V w_{\vec{k}'} w_{\vec{k}}, \text{ tal que } \begin{cases} w_{\vec{k}} = 1 & \text{pl } |\bar{\epsilon}_{\vec{k}}| < \omega_D \\ w_{\vec{k}} = 0 & \text{pl } |\bar{\epsilon}_{\vec{k}}| > \omega_D \end{cases}$$

É possível mostrar (Lista!) que $H_{cp} |\Psi_{cp}\rangle = E_{cp} |\Psi_{cp}\rangle$ com

$$E_{cp} = -2\omega_D \left(\exp\left(\frac{2}{Vd(E_F)}\right) - 1 \right)^{-1}$$

ou seja, $E_{cp} < 0$ para V arbitrariamente pequena. Para $Vd(E_F) \ll 1$, temos

$|E_{cp}| \equiv \Delta_{cp} \approx 2\omega_D e^{-\frac{2}{Vd(E_F)}}$

 que é o "gap" pl se formar um par de Cooper.

Teoria BCS: Hamiltoniano efetivo e campo médio

(6)

Uma vez entendido o mecanismo básico de formação do par de Cooper, fica natural a descrição em termos do Hamiltoniano efetivo:

$$H_{BCS} = \sum_{\vec{k}\sigma} \bar{E}_{\vec{k}} c_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k}\sigma} + \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow}$$

onde $V_{\vec{k}\vec{k}'} = -V$ para estado com energia de partícula única $\bar{E}_{\vec{k}}, \bar{E}_{\vec{k}'} < \omega_D$.
(Hartree-Fock)

Consideremos a solução de campo médio para esse Hamiltoniano:

$$H_{BCS}^{MF} = \sum_{\vec{k}\sigma} \bar{E}_{\vec{k}} c_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k}\sigma} + \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle + \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \langle c_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \rangle$$

que escrevemos na forma:

$$H_{BCS}^{MF} = \sum_{\vec{k}\sigma} \bar{E}_{\vec{k}} c_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k}\sigma} - \sum_{\vec{k}} (\Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} + \Delta_{\vec{k}}^{\dagger} c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow})$$

onde

$$\Delta_{\vec{k}} \equiv \sum_{\vec{k}'\vec{k}'} (-V_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle) \Rightarrow \Delta_{\vec{k}}^{\dagger} = \sum_{\vec{k}'\vec{k}'} (-V_{\vec{k}\vec{k}'}^{\dagger}) \langle c_{\vec{k}'\uparrow}^{\dagger} c_{-\vec{k}'\downarrow}^{\dagger} \rangle$$

e o termo constante $\sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} c_{\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \rangle \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle$ não interfere no resultado.

Como visto na Lista 1, Hamiltonianos do tipo H_{BCS}^{MF} podem ser resolvidos por uma transformação de Bogoliubov:

$$\begin{cases} \gamma_{\vec{k}\uparrow} = u_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow} + v_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \\ \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} = -v_{\vec{k}}^{\dagger} c_{\vec{k}\uparrow} + u_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{\vec{k}\uparrow} \\ \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & v_{\vec{k}} \\ -v_{\vec{k}}^{\dagger} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow} \\ c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \quad \text{ou a transf. inversa:}$$

$$\begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow} \\ c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & -v_{\vec{k}} \\ v_{\vec{k}}^{\dagger} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{\vec{k}\uparrow} \\ \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix}$$

É possível mostrar (List 2) que o Hamiltoniano fica

na forma diagonal

$$H_{BCS}^{MF} = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} (\gamma_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}\uparrow} + \gamma_{\vec{k}\downarrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}\downarrow}) + cte \quad \text{onde}$$

as energias são dadas por

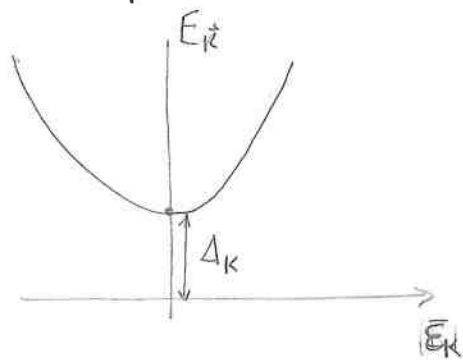
$$E_{\vec{k}} = \sqrt{\bar{E}_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}$$

e $u_{\vec{k}}, v_{\vec{k}}$ são dadas por

$$\begin{cases} |u_{\vec{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{E}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} \right) \\ |v_{\vec{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{E}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} \right) \end{cases}$$

em $k=0$

Temos então o espectro descrito em termos de operadores fermiônicos $\gamma_{\vec{k}\sigma}$, cuja partícula relacionada $\gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger |0\rangle$ é denominada bogoliubon



sendo $\bar{E}_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (tipicamente), $E_{\vec{k}}$ vai apresentar

um gap de magnitude $\Delta_{k=0}$ em $|\vec{k}| = k_F$. Ou seja,

não há estados disponíveis para excitação (bogoliubons) com energias menores que $\Delta_{k=0}$ acima da energia

de Fermi: o sistema claramente deixa de ser um metal.

É possível escrever uma equação auto-consistente para determinar $\Delta_{\vec{k}}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{k}} &= \sum_{\vec{k}'} (-V_{\vec{k}\vec{k}'}) \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle = \sum_{\vec{k}'} (-V_{\vec{k}\vec{k}'}) \langle (u_{\vec{k}'}^\dagger \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} - v_{\vec{k}'} \gamma_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger) (u_{\vec{k}'} \gamma_{\vec{k}'\uparrow} + v_{\vec{k}'} \gamma_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger) \rangle \\ &= \sum_{\vec{k}'} (-V_{\vec{k}\vec{k}'}) \left(u_{\vec{k}'}^\dagger v_{\vec{k}'} \langle \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} \gamma_{\vec{k}'\downarrow}^\dagger \rangle - v_{\vec{k}'} u_{\vec{k}'}^\dagger \langle \gamma_{\vec{k}'\downarrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}'\downarrow} \rangle \right) \\ &= \sum_{\vec{k}'} (-V_{\vec{k}\vec{k}'}) u_{\vec{k}'}^\dagger v_{\vec{k}'} (1 - 2N_F(E_{\vec{k}'})) \end{aligned}$$

sendo que $u_{\vec{k}'}, v_{\vec{k}'}$ e $E_{\vec{k}'}$ dependem de $\Delta_{\vec{k}}$.

Um outro modo de se obter uma equação auto-consistente para Δ_k é usando função de Green e equação de movimento (como fizemos antes). Definiremos as seguintes funções de Green de Matsubara:

$$G_{\uparrow\uparrow}(\vec{k}, \tau) = - \langle T_\tau (C_{\vec{k}\uparrow}(\tau) C_{\vec{k}\uparrow}^\dagger(0)) \rangle \quad (\text{particular})$$

$$F_{\downarrow\uparrow}(\vec{k}, \tau) = - \langle T_\tau (C_{-\vec{k}\downarrow}(\tau) C_{\vec{k}\uparrow}^\dagger(0)) \rangle \quad (\text{parar})$$

Note que a função $F_{\downarrow\uparrow}$ envolve termos que não conservam o número de partículas com um dado \vec{k} e spin. Isso é uma característica do modelo de campo médio (e do próprio Hamiltoniano de BCS, embora, globalmente o número total de partículas é conservado).

Escrevendo as equações de movimento usando H_{BCS}^{MF} , obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} G_{\uparrow\uparrow}(\vec{k}, \tau) = -\delta(\tau) - \bar{E}_k G_{\uparrow\uparrow}(\vec{k}, \tau) + \Delta_k F_{\downarrow\uparrow}(\vec{k}, \tau) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} F_{\downarrow\uparrow}(\vec{k}, \tau) = -\bar{E}_k F_{\downarrow\uparrow}(\vec{k}, \tau) + \Delta_k^* G_{\uparrow\uparrow}(\vec{k}, \tau) \end{cases}$$

ou, no espaço de frequência: $G(\vec{k}, i\kappa_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\kappa_n \tau} G_{\uparrow\uparrow}(\vec{k}, \tau)$

$$\begin{cases} (-i\kappa_n + \bar{E}_k) G_{\uparrow\uparrow}(\vec{k}, i\kappa_n) = -1 + \Delta_k F_{\downarrow\uparrow}(\vec{k}, i\kappa_n) \\ (-i\kappa_n - \bar{E}_k) F_{\downarrow\uparrow}(\vec{k}, i\kappa_n) = \Delta_k^* G_{\uparrow\uparrow}(\vec{k}, i\kappa_n) \quad (\text{"fechado"}) \end{cases}$$

que podem ser resolvidas e obtêm:

$$\begin{cases} G_{\uparrow\uparrow}(\vec{k}, i\kappa_n) = \frac{i\kappa_n + \bar{E}_k}{(i\kappa_n)^2 - (\bar{E}_k^2 + |\Delta_k|^2)} \\ F_{\downarrow\uparrow}(\vec{k}, i\kappa_n) = \frac{-\Delta_k^*}{(i\kappa_n)^2 - (\bar{E}_k^2 + |\Delta_k|^2)} \end{cases}$$

pólos em

$$i\kappa_n = \pm E_k = \pm \sqrt{\bar{E}_k^2 + |\Delta_k|^2}$$

A auto-consistência entre relacionando Δ_K e $F_{\downarrow\uparrow}$:

$$\Delta_K = \sum_{K'} (-V_{KK'}) \langle C_{-K'\downarrow} C_{K'\uparrow} \rangle = V \sum_{K'}^{|\bar{E}_K| < \omega_D} F_{\downarrow\uparrow}^* (\vec{K}, \tau=0^+)$$

$$\Delta_K = - \sum_{K'}^{|\bar{E}_K| < \omega_D} \frac{1}{\beta} \sum_{iK_n} \frac{V_{KK'} \Delta_{K'} e^{-iK_n 0^+}}{(iK_n)^2 - (\bar{E}_K^2 + |\Delta_{K'}|^2)} = \left(\frac{1}{(iK_n)^2 - E_K^2} = \frac{-\frac{1}{2} E_K}{(iK_n) + E_K} + \frac{\frac{1}{2} E_K}{iK_n - E_K} \right) =$$

$$= - \sum_{K'}^{|\bar{E}_K| < \omega_D} V_{KK'} \Delta_{K'} \left[\frac{1}{\beta} \sum_{iK_n} \left(\frac{-\frac{1}{2} E_{K'}}{(iK_n) - (-E_{K'})} \right) + \frac{1}{\beta} \sum_{iK_n} \left(\frac{\frac{1}{2} E_{K'}}{(iK_n) - E_{K'}} \right) \right] = \left(\text{soma de Matsubara} \right) =$$

$$\Delta_K = - \sum_{K'}^{|\bar{E}_K| < \omega_D} V_{KK'} \Delta_{K'} \left(\frac{n_F(-E_{K'})}{-2E_{K'}} + \frac{n_F(E_{K'})}{2E_{K'}} \right) \quad // \quad \text{onde } E_K = \sqrt{\bar{E}_K^2 + \Delta_K^2}$$

Agora assumimos que Δ_K não depende de K , o que ocorre se $V_{KK'} = V$ como temos assumido. Isso é o chamado "s-wave pairing" em que $\Delta_K = \Delta_0$ é "esférico" no espaço \vec{K} .

Temos, fazendo $\Delta_K \rightarrow \Delta_0$, a seguinte eq de auto-consistência (transcendental)

$$1 = -V \sum_K^{|\bar{E}_K| < \omega_D} \frac{1 - 2n_F(E_K)}{2E_K} = V d(E_F) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\bar{E}_K \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\bar{E}_K^2 + \Delta_0^2}\right)}{2\sqrt{\bar{E}_K^2 + \Delta_0^2}}$$

e Δ_0 pode ser determinada numericamente por essa equação (vide abaixo).

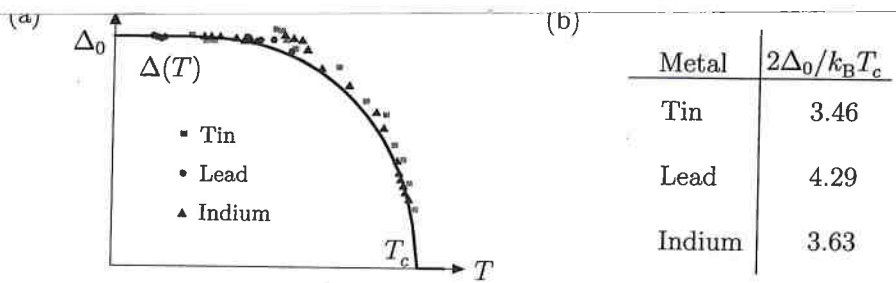


FIG. 18.4. (a) A sketch showing measured values of the gap parameter for three different metals compared to the BCS predictions. To the left the temperature dependence is shown as it follows from the BCS gap equation in Eq. (18.28) together with experimental values. (b) A table of the measured value of the ratio between twice the gap at zero temperature and critical temperature, determined from tunneling measurements. The theoretical BCS value is 3.53 as stated in Eq. (18.33).

Alguns comentários adicionais.

- Para $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$), temos $\tanh\left(\frac{\beta}{2} E_K\right) \rightarrow 1$ de modo que o gap é dado ^(por:)

$$1 = V_d(E_F) \int_0^{W_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}} = V_d(E_F) \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{W_D}{\Delta_0}\right) \quad \text{ou}$$

$$\frac{W_D}{\Delta_0} = \operatorname{sech}\left(\frac{1}{V_d(E_F)}\right) = \frac{e^{\frac{1}{V_d(E_F)}} - e^{-\frac{1}{V_d(E_F)}}}{2} \quad V_d(E_F) \ll 1 \quad \approx \frac{e^{\frac{1}{V_d(E_F)}}}{2}$$

Logo, no regime de acoplamento fraco, temos: $\Delta_0 = 2W_D e^{-\frac{1}{V_d(E_F)}}$

que é o resultado para o "gap" de energia pela formação de pares de Cooper.

- A transição de fase marcada pela instabilidade de Cooper ocorre em uma temperatura T_c em que $\Delta_0(T=T_c) \rightarrow 0$. Nesse caso, a auto-consistência ^(fica)

$$1 = V_d(E_F) \int_0^{W_D} \frac{\tanh\left(\frac{\beta_c}{2} \varepsilon\right)}{\varepsilon} d\varepsilon = V_d(E_F) \int_0^{\frac{\beta_c W_D}{2}} \frac{du \tanh(u)}{u} = \left(\begin{array}{l} \text{integrando} \\ \text{por partes} \end{array} \right)$$

$$= V_d(E_F) \left(\ln\left(\frac{W_D}{2k_B T_c}\right) - \int_0^{\frac{\beta_c W_D}{2}} du \ln(u) (\operatorname{cosh}(u))^{-2} \right)$$

Para $k_B T_c \ll W_D$, $\left(\frac{\beta_c W_D}{2} \gg 1\right)$, a segunda integral tende

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(u)}{(\operatorname{cosh}(u))^2} = \ln \frac{\pi}{4} - \gamma \quad (\text{Lista})$$

onde γ é a constante de Euler $\gamma \approx 0,577$, logo

$$\ln\left(\frac{W_D}{2k_B T_c} \frac{24}{\pi}\right) = \frac{1}{V_d(E_F)} - \gamma \Rightarrow \left\{ k_B T_c = \frac{2W_D}{\pi} e^{-\frac{1}{V_d(E_F)}} \cdot e^{\gamma} \right\} \quad \text{ou seja}$$

$$k_B T_c = \frac{e^{\gamma}}{\pi} \Delta_0 \approx 0,567 \Delta_0 \quad \text{em uma outra forma:} \quad \frac{2\Delta_0}{k_B T_c} = 3,53$$

que não envolve parâmetro livre e é uma forte predição do modelo BCS. De fato, a concordância do experimento é excelente (vide tabela anterior).