Funções de Green

"Função de Green" é um termo genérico e precisamos sempre ter em mente de qual função de Green estamos falando. Isso porque diferentes equações diferenciais levam a "funções de Green" distintas.

Por exemplo, o primeiro contato de um estudante de Física com função de Green provavelmente se dá no contexto de eletromag:

Eq de Poisson: $\boxed{\underbrace{\nabla^2 \phi(\vec{r})}_{\text{potencial elétrico}} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\rho_e(\vec{r})}_{\text{distribuição de carga}}}$

à qual está associada a eq. equivalente para função de Green:

$$\nabla^2 G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \xrightarrow{(\ldots)} \boxed{\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d\vec{r}\,' \, G(r-r')\, \rho_e(\vec{r}\,')}$$

(sujeito às mesmas condições de contorno) (verifique aplicando ∇^2)

Encontrada a função de Green (dadas as condições de contorno), o potencial é obtido para qualquer distribuição de carga. Por exemplo, no caso "sem bordas", podemos escrever $G(\vec{r}) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} G(\vec{k})$

e
$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 G(\vec{r}) &= \int (-k^2 G(\vec{k})) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \delta(\vec{r}) &= \int (1) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^3} d^3k \end{aligned}\right\} -k^2 G(k) = 1 \Rightarrow \boxed{G(k) = -\frac{1}{k^2}}$$

Logo $G(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(-\frac{1}{k^2}\right) = (\ldots)^{(*)} = -\frac{1}{4\pi r}$ //

$\boxed{(*) \text{ use } \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\vec{r}\,' \frac{\rho_e(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$ que é o resultado usual.

Nesse curso estamos interessados nas funções de Green relativas à Equação de Schrödinger, tanto de partícula-única como de muitos-corpos, dependente do tempo ou não.

Comecemos com a função de Green de partícula única independente do tempo no caso da Eq de Schrödinger na forma:

$$\hat{H}\Psi_E(\vec{r}) = \left(\hat{H}_0(\vec{r}) + \hat{V}(\vec{r})\right)\Psi_E(\vec{r}) = E\,\Psi_E(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{(\hat{E}-\hat{H})\Psi_E(\vec{r}) = 0}$$

A função de Green relacionada ao operador diferencial $(E-\hat{H})$ será:

$$(E-\hat{H})\,G(\vec{r},\vec{r}\,';E) = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Note que podemos também definir a função de Green $G_0(r,\vec{r}\,',E)$:

$$\boxed{(E-\hat{H}_0(\vec{r}))G_0(\vec{r},\vec{r}\,';E) = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

relacionada à eq $(E-H_0)\Psi_E^0(\vec{r}) = 0$. Note que podemos escrever

$$\boxed{G_0^{-1}(\vec{r},\vec{r}\,',E) = (\hat{E}-\hat{H}_0)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} \quad \text{ou} \quad \boxed{G_0^{-1}(\vec{r},E) = (E-\hat{H}_0)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{G_0^{-1}(\vec{r},E)\,\Psi_E^0(\vec{r}) = 0}$$

uma vez que $\displaystyle\int d\vec{r}\,''\,G_0^{-1}(r,r'')\,G_0(r'',r') = \delta(r-r')$

$$\boxed{\int d\vec{r}\,''\langle\vec{r}|G^{-1}|\vec{r}\,''\rangle\langle\vec{r}\,''|G_0|\vec{r}\,'\rangle = \langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle}$$

Com isso, temos:

$$(E-\hat{H}_0-V(\vec{r}))\Psi_E(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \left(G_0^{-1}(\vec{r},E) - V(\vec{r})\right)\Psi_E(\vec{r}) = 0$$

No espírito da Representação de Interação, podemos mostrar que $\Psi_E(\vec{r})$ e $\Psi_E^0(\vec{r})$ estão relacionados por:

$$\boxed{\Psi_E(\vec{r}) = \Psi_E^0(\vec{r}) + \int d\vec{r}\,'\,G_0(\vec{r},\vec{r}\,',E)\,V(\vec{r}\,')\,\Psi_E(\vec{r}\,')}$$

Prova: $G^{-1}(\vec{r},E)\,\psi_E(\vec{r}) = (E-H)\,\psi_E(\vec{r}) = (\overbrace{E-H_0}^{G_0^{-1}(\vec{r},E)}-V)\,\psi_E(\vec{r}) =$

$$\left(G_0^{-1}(\vec{r},E) + V(\vec{r})\right)\left(\psi_E^0(\vec{r}) + \int dr'\, G_0(\vec{r},\vec{r}';E)\, V(\vec{r}')\,\psi_E(\vec{r}')\right) =$$

$$= \Big(\overset{zero}{\cancel{G_0^{-1}(\vec{r},E)\,\psi_E^0(\vec{r})}} - V(\vec{r})\,\psi_E^0(\vec{r}) + \int d\vec{r}'\, \underbrace{G_0^{-1}(\vec{r},E)\, G_0(\vec{r},\vec{r}';E)}_{\delta(\vec{r}-\vec{r}')}\, V(\vec{r}')\,\psi_E(\vec{r}')$$

$$- \int dr'\, V(r)\, G_0(r,\vec{r}';E)\, V(\vec{r}')\,\psi_E(\vec{r}')\Big)$$

$$= V(\vec{r})\left(\psi_E(\vec{r}) - \psi_E^0(\vec{r})\right) - V(\vec{r}) \int dr'\, G_0(\vec{r},\vec{r}',E)\, V(\vec{r}')\,\psi_E(\vec{r}') = 0$$

C.Q.D.

Assim, conhecidos $\psi_E^0(\vec{r})$ e $G_0(\vec{r},\vec{r}';E)$ ($H_0 \rightarrow$ "resolvido")

podemos expandir $\psi_E(\vec{r})$ na forma:

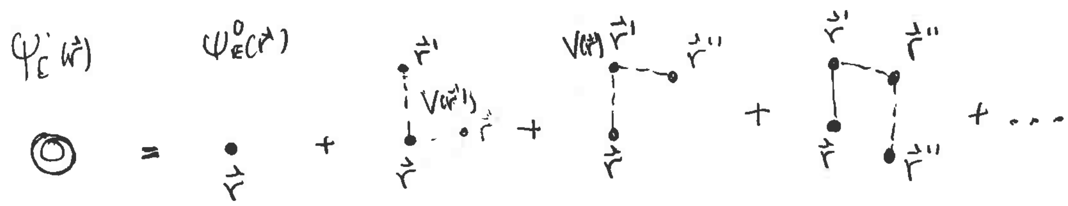
$$\psi_E(\vec{r}) = \psi_E^0(\vec{r}) + \int d\vec{r}'\, G_0(\vec{r},\vec{r}';E)\, V(\vec{r}')\,\psi_E^0(\vec{r}') + \qquad \mathcal{O}(V)$$

$$+ \int d\vec{r}'\,d\vec{r}''\, G_0(\vec{r},\vec{r}',E)\, V(\vec{r}')\, G_0(\vec{r}',\vec{r}'',E)\, V(\vec{r}'')\,\psi_E^0(\vec{r}'') \qquad \mathcal{O}(V^2)$$

$$+ \int d\vec{r}'\,d\vec{r}''\,d\vec{r}'''\, G_0(\vec{r},\vec{r}',E)\, V(\vec{r}')\, G_0(\vec{r}',\vec{r}'',E)\, V(\vec{r}'')\, G_0(\vec{r}'',\vec{r}''',E)\, V(\vec{r}''')\,\psi(\vec{r}''') \qquad \mathcal{O}(V^3)$$

$$+ \ldots$$

ou, "diagramaticamente"



Pictoricamente, podemos escrever:

$$\Psi_E = \Psi_E^0 + G_0 V \Psi_E^0 + G_0 V G_0 V \Psi_E^0 + G_0 V G_0 V G_0 V \Psi_E^0 + \dots$$

$$\Psi_E = \Psi_E^0 + (G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots) V \Psi_E^0 \qquad (I)$$

onde cada $G_0 V$ "carrega", implicitamente, uma integral $\int dr' G_0(\vec{r},\vec{r}') V(\vec{r}') \dots$

Escrevendo a eq formal para Ψ_E nessa forma, temos

$$\Psi_E = \Psi_E^0 + G_0 V \Psi_E$$

No entanto, podemos escrever também,

$$\boxed{\Psi_E = \Psi_E^0 + G V \Psi_E^0} \ (II) \quad \text{ou} \quad \Psi_E(\vec{r}) = \Psi_E(\vec{r}) + \int dr' G(\vec{r},\vec{r}') . V(\vec{r}') \Psi_E^0(\vec{r}')$$

que é solução de $(E-H)\Psi_E = 0$

Prova "pictórica" (lembrar das integrais implícitas)

Definições:

$$\begin{cases} (E-H)\Psi_E = 0 \Rightarrow G^{-1}\Psi_E = 0 \\ (E-H_0)\Psi_E^0 = 0 \Rightarrow G_0^{-1}\Psi_E^0 = 0 \end{cases} \Rightarrow G^{-1} = E - H = (E-H_0) - V = G_0^{-1} - V \ //$$

logo:

$$G^{-1}\Psi_E = G^{-1}(\Psi_E^0 + G V \Psi_E^0) = G^{-1}\Psi_E^0 + V\Psi_E^0 = (G_0^{-1} - V)\Psi_E^0 + V\Psi_E^0$$

$$= \underbrace{G_0^{-1}\Psi_E^0}_{\text{zero}} - V\Psi_E^0 + V\Psi_E^0 = 0 \ // \quad \text{c.q.d.}$$

Comparando as soluções (I) e (II)

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_E = \Psi_E^0 + \underline{(G_0 + G_0 V G_0 + \dots)} V \Psi_E^0 \\ \Psi_E = \Psi_E^0 + \underline{G} V \Psi_E^0 \end{array}\right\} \Rightarrow G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots$$

$$= G_0 + G_0 V \boxed{(G_0 + G_0 V G_0 + \dots)}$$

$$\boxed{G = G_0 + G_0 V G} \quad \boxed{\text{Eq de Dyson}}$$

Resultados similares podem ser obtidos no caso da Eq. de Schrödinger dependente do tempo: ($\hbar \equiv 1$)

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H\right]\psi(\vec{r},t) = 0 \qquad (H = H_0 + V)$$

para $V = 0$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right]\psi^0(\vec{r},t) = 0$$

As funções de Green desses operadores satisfazem o seguinte:

$$\begin{cases} \left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right] G_0(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t') \\ \left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_0 - V(\vec{r})\right] G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t') \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} G_0^{-1}(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \left(i\frac{\partial}{\partial t} - H_0(\vec{r})\right)\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t') \\ G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \left(i\frac{\partial}{\partial t} - H\right)\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t') \end{cases}$$

[uma vez que $\int G^{-1}(\vec{r},t;\vec{r}'',t'')\,G(\vec{r}'',t'';\vec{r}',t')\,d^3\vec{r}''\,dt'' = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$]

E temos então, as soluções

$$\psi(\vec{r},t) = \psi^0(\vec{r},t) + \int d\vec{r}'\,dt'\; \underline{\underline{G_0(\vec{r},t;\vec{r}',t')}}\; V(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}',t')$$

ou, equivalentemente,

$$\psi(\vec{r},t) = \psi^0(\vec{r},t) + \int d\vec{r}'\,dt'\; \underline{\underline{G(\vec{r},t;\vec{r}',t')}}\; V(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}',t')$$

onde tb vale a eq de Dyson $\boxed{G = G_0 + G_0 V G}$

(integrais em $\int d\vec{r}'dt' \ldots$) $\longrightarrow$

A funçõs de Green $G(\vec{r},t,\vec{r}',t')$ é muitas vezes chamada de <u>propagador</u> uma vez que pode ser vista como um operador que atua em $\psi(\vec{r},t)$ na forma:

$$\psi(\vec{r},t) = \int d\vec{r}'\, G(r,t;\vec{r}',t')\, \psi(\vec{r}',t') \qquad \underline{t>t'}$$

ou seja, "leva" ψ de $\vec{r}'$ (no tempo t') para $\vec{r}$ (tempo <u>posterior</u> t)

<u>Prova:</u> Temos: $\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{r})\right)\psi(\vec{r},t) = 0$ (Eq de Schrödinger). Aplicando:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{r})\right)\int d^3\vec{r}'\, G(\vec{r}t,\vec{r}'t')\,\psi(\vec{r}',t') = \int d^3\vec{r}\, \underbrace{\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{r})\right) G(\vec{r},t;\vec{r}',t')}_{\equiv \delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')}\,\psi(\vec{r}',t')$$

$$= \psi(\vec{r}',t)\,\delta(t-t') \underset{?}{=} 0 \quad \text{se } \underline{t>t'}$$

Para $t>t'$, podemos escrever $G(r,t;\vec{r}',t')$ para $t>t'$ como uma funçõs <u>retardada</u> na forma:

$$\boxed{G(\vec{r},\vec{r}',t>t') = G^R(\vec{r},t,\vec{r}'t') = -i\,\theta(t-t')\,\langle\vec{r}|\,e^{-iH(t-t')}\,|\vec{r}'\rangle}$$

que também é uma soluçõs possível da eq $\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H\right)G^R(\vec{r}t\,\vec{r}',t') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$

(Mostre!)

Uma outra soluçõs possível é a chamada funçõs de Green <u>avançada</u>:

$$\boxed{G^A(\vec{r},t;\vec{r}',t') = +i\,\Theta(t'-t)\,\langle\vec{r}|\,e^{-iH(t-t')}\,|\vec{r}'\rangle}$$

Note que G^A "propaga do futuro para o passado", ou seja, a particula está em um ponto $\vec{r}'$ em um tempo futuro t' e "propaga" para o ponto $\vec{r}$ em um tempo anterior, embora seja matematicamente correta.

O propagador G^R pode ser calculado em outras bases de partícula única, por exemplo:

$$G^R(n.t, n't') = -i\,\theta(t-t')\,\langle \phi_n|\, e^{-iH(t-t')}\, |\phi_{n'}\rangle$$

(leva a partícula do estado $|\phi_{n'}\rangle$ no tempo t' ao estado $|\phi_n\rangle$ no tempo t)

Obviamente, recuperamos $G(\vec{r},t;\vec{r}',t')$ por uma simples mudança de base:

$$G^R(\vec{r}\,t;\vec{r}',t') = -i\,\theta(t-t') \sum_{nn'} \langle \vec{r}|\phi_n\rangle\, G^R(n.t;n't')\, \langle \phi_{n'}|\vec{r}'\rangle$$

$$= -i\,\theta(t-t') \sum_{nn'} \phi_n(\vec{r})\, G^R(n,t,n't')\, \phi^*_{n'}(\vec{r}')$$

Essa forma é particularmente útil se os $\phi_n(\vec{r})$ forem auto-estados do Hamiltoniano: $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \Rightarrow$

$$G^R(\vec{r},t;\vec{r}',t') = -i\,\theta(t-t') \sum_{nn'} \phi_n(\vec{r})\, e^{-E_n(t-t')}\, \delta_{nn'}\, \phi^*_{n'}(\vec{r}')$$

$$= -i\,\theta(t-t') \sum_{n} \phi_n(\vec{r})\, \phi^*_n(\vec{r}')\, e^{-E_n(t-t')}$$

(se $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$)

Funções de Green de partícula única em sistemas de Muitos Corpos

São também chamadas "funções de Green" mas as definições são distintas da que vimos até aqui (do mesmo modo que funções de onda de muitos corpos são distintas ~~de~~ funções de onda de um corpo).

Se $\psi_\sigma^{+}(\vec{r},t)$ é um operador de campo associado à uma partícula (fermiônica ou bosônica) de spin σ na posição $\vec{r}$ e tempo t, definimos a função de Green retardada associada à $\psi_\sigma^{+}(\vec{r},t)$ $(\psi_\sigma(\vec{r},t))$ na forma:

criação de

$- \to$ bósons
$+ \to$ férmions

$$\boxed{G^{R}_{\sigma\sigma'}(\vec{r}t;\vec{r}'t') = -i\,\Theta(t-t')\left\langle \left[\psi_\sigma(\vec{r},t),\psi^{+}_{\sigma'}(\vec{r}',t')\right]_{\mp}\right\rangle}$$

onde $\langle \ldots \rangle = \mathrm{tr}[\hat{\rho}\ldots]$ $(\hat{\rho} = e^{-\beta H})$ e $[A,B]_{\mp} = AB \mp BA$ $\begin{array}{l} - \to \text{bósons} \\ + \to \text{férmions}\end{array}$

À "temperatura zero", a média é tomada apenas sobre o estado fundamental de N-partículas. Do mesmo modo, definimos:

$$\boxed{G^{A}_{\sigma\sigma'}(\vec{r}t;\vec{r}'t') = +i\,\Theta(t'-t)\left\langle \left[\psi_\sigma(\vec{r},t),\psi^{+}_{\sigma'}(\vec{r}',t')\right]_{\mp}\right\rangle}$$

Existem alguns outros tipos de funções de Green que serão importantes ao longo do curso:

"Greater" $\quad G^{>}_{\sigma\sigma'}(\vec{r}t;\vec{r}'t') \equiv -i\langle \psi_\sigma(\vec{r},t)\psi^{\dagger}_{\sigma'}(\vec{r}'t')\rangle$

"Lesser" $\quad G^{<}_{\sigma\sigma'}(\vec{r}t;\vec{r}'t') \equiv -i(\pm 1)\langle \psi^{\dagger}_{\sigma'}(\vec{r}'t')\psi_\sigma(\vec{r},t)\rangle$

$+ \to$ bóson
$- \to$ férmion

Note que:

$$\boxed{\begin{aligned} G^{R}_{\sigma\sigma'}(\vec{r}t;\vec{r}'t') &= \Theta(t-t')\left(G^{>}_{\sigma\sigma'}(rt;r't') - G^{<}_{\sigma\sigma'}(rt;\vec{r}'t')\right) \\ G^{A}_{\sigma\sigma'}(\vec{r}t;\vec{r}'t') &= \Theta(t'-t)\left(G^{<}_{\sigma\sigma'}(rt;\vec{r}'t') - G^{>}(rt;\vec{r}'t')\right) \end{aligned}}$$

Mudança de base: as GFs acima podem ser escritas como:

$$G^{R}_{\sigma\sigma'}(\vec{r}t,\vec{r}'t') = \sum_{\nu\nu'} \psi_{\nu\sigma}(\vec{r})\, G^{R}_{\sigma\sigma'}(\nu t,\nu' t')\, \psi^{*}_{\nu'\sigma'}(\vec{r}')$$

onde

$$\boxed{G^{R}_{\sigma\sigma'}(\nu t,\nu' t') = -i\,\Theta(t-t')\langle [a_{\sigma\nu}(t), a^{\dagger}_{\sigma'\nu'}(t')]_{\pm}\rangle}$$

com os operadores $a^{\dagger}_{\sigma\nu}(t)$ escritos na Rep. de Heisenberg

$$\boxed{a_{\sigma\nu}(t) = e^{iHt}\, a_{\sigma\nu}\, e^{-iHt}}$$

Funções de Green para sistemas com invariância de translação:

$$G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{r}t, \vec{r}'t') \rightarrow G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{r}-\vec{r}', t, t')$$

Na base $\vec{k}$: $\psi_k(\vec{r}) = \langle \vec{r}|\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, temos:

$$G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \psi_{\vec{k}}(\vec{r})\, G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{k},t;\vec{k}'t')\, \psi^*_{\vec{k}'}(\vec{r}')$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{k},t;\vec{k}',t')\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} \times \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} e^{i\vec{k}\vec{r}'}\right)$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\, G^R(kt\, k't')\, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}'}$$

Agora, como $G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{r}\,t;\vec{r}'t') = G^R_{\sigma\sigma'}((\vec{r}-\vec{r}'),t,t')$ esse termo tem que ser igual a 1. Para que isso ocorra, necessariamente, teremos:

$$G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{k},t;\vec{k}'t') = G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{k},t,t')\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \text{ logo}$$

$$\boxed{G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{r}-\vec{r}',t,t') = \frac{1}{V}\sum_{k} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\, G_{\sigma\sigma'}(\vec{k},t,t')}$$

com $G^R_{\sigma\sigma'}(\vec{k},t,t') = -i\,\theta(t-t')\langle[a_{\vec{k}\sigma}(t), a^\dagger_{\vec{k}\sigma'}(t')]_\pm\rangle$

Veremos exemplos desse tipo no modelo de Kondo, por exemplo.

A Representação de Lehmann

Consideremos agora a transformada de Fourier das GFs. Tratamos por ora de funções de Green diagonais e iniciamos com as GFs que não envolvem ordem temporal; $G^>$ e $G^<$ p/ férmions

Por exemplo: $G^>(\nu, t, t') = -i \langle a_\nu(t)\, a_\nu^\dagger(t') \rangle$

$$G^>(\nu, t, t') = -i \frac{1}{Z} \sum_{\mathbb{K}} \langle \mathbb{K} | e^{-\beta H} a_\nu(t)\, a_\nu^\dagger(t') | \mathbb{K} \rangle$$

onde $|\mathbb{K}\rangle = \sum_{n_{\nu_1} n_{\nu_2} \ldots} C_{\mathbb{K}\{n_\nu\}} | n_{\nu_1} n_{\nu_2} n_{\nu_3} \ldots \rangle_N$ são estados de N partículas

Consideremos a base "especial" $H|\mathbb{K}\rangle = E_{\mathbb{K}} |\mathbb{K}\rangle$: $\left(\mathbb{1} = \sum_{\mathbb{K}'} |\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'| \right)$

$$G^>(\nu, t, t') = -i \frac{1}{Z} \sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} e^{-\beta E_{\mathbb{K}}} \underbrace{\langle \mathbb{K} | a_\nu(t) | \mathbb{K}' \rangle}_{\langle \mathbb{K} | a_\nu | \mathbb{K}' \rangle\, e^{+i(E_{\mathbb{K}} - E_{\mathbb{K}'})t}} \underbrace{\langle \mathbb{K}' | a_\nu^\dagger(t') | \mathbb{K} \rangle}_{\langle \mathbb{K}' | a_\nu^\dagger | \mathbb{K} \rangle\, e^{-i(E_{\mathbb{K}} - E_{\mathbb{K}'})t'}}$$

$$G^>(\nu, t, t') = -i \frac{1}{Z} \sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} e^{-\beta E_{\mathbb{K}}} \langle \mathbb{K} | a_\nu | \mathbb{K}' \rangle \langle \mathbb{K}' | a_\nu^\dagger | \mathbb{K} \rangle\, e^{+i(E_{\mathbb{K}} - E_{\mathbb{K}'})(t-t')}$$

No espaço de frequencia $G^>(\nu, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t-t')\, e^{i\omega(t-t')} G^>(\nu, t-t')$, temos:

$$\boxed{G^>(\nu, \omega) = -i \frac{1}{Z} 2\pi \sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} e^{-\beta E_{\mathbb{K}}} \langle \mathbb{K} | a_\nu | \mathbb{K}' \rangle \langle \mathbb{K}' | a_\nu^\dagger | \mathbb{K} \rangle\, \delta(E_{\mathbb{K}} - E_{\mathbb{K}'} + \omega)}$$

Já que $\delta(E_1 - E_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i(E_1 - E_2)t}\, dt$

Para férmions, obtemos de forma similar:

$$G^{<}(\nu,t,t') = -i(-1)\langle a_\nu^\dagger(t')\, a_\nu(t)\rangle = +i\,\langle a_\nu^\dagger(t')\, a_\nu(t)\rangle$$

$$(\dots)$$

$$G^{<}(\nu,\omega) = +\frac{i\,2\pi}{Z}\sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} e^{-\beta E_{\mathbb{K}}} \langle \mathbb{K}|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'|a_\nu|\mathbb{K}\rangle\, \delta(E_{\mathbb{K}} - E_{\mathbb{K}'} - \omega)$$

($t \leftrightarrow t'$)

Troca $\mathbb{K} \leftrightarrow \mathbb{K}'$ e $e^{-\beta E_{\mathbb{K}}} \to \underline{e^{-\beta E_{\mathbb{K}'}} = e^{-\beta(E_{\mathbb{K}}+\omega)}}$ $(\dots)$

$$\boxed{G^{<}(\nu,\omega) = +\frac{i\,2\pi}{Z}\sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} e^{-\beta(E_{\mathbb{K}}+\omega)} \langle \mathbb{K}'|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}\rangle\langle \mathbb{K}|a_\nu|\mathbb{K}'\rangle\, \delta(E_{\mathbb{K}'} - E_{\mathbb{K}} - \omega)}$$

$$= -G^{>}(\nu,\omega)\, e^{-\beta\omega}$$ que relaciona $G^{<}(\omega)$ e $G^{>}(\omega)$

Agora vamos à GF retardada, lembrando que, nesse caso precisamos fazer $\underline{\omega \to \omega + i\eta}$ $(\eta \to 0^+)$ para definir a transformada.

Sendo $t > t' \equiv 0$, para FÉRMIONS:

$$G^R(\nu,t,0) = -i\,\langle [a_\nu(t), a_\nu^\dagger(0)]_+\rangle = -i\langle a_\nu(t)a_\nu^\dagger(0) + a_\nu^\dagger(0)a_\nu(t)\rangle$$

$$= \frac{-i}{Z}\sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} e^{-\beta E_{\mathbb{K}}}\Big(\langle \mathbb{K}|a_\nu|\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}\rangle\, e^{+i(E_{\mathbb{K}}-E_{\mathbb{K}'})t} + \langle \mathbb{K}|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'|a_\nu|\mathbb{K}\rangle\, e^{-i(E_{\mathbb{K}}-E_{\mathbb{K}'})t}\Big)$$ $\to$ TRANSF. FOURIER $\to$

$$\Rightarrow G^R(\nu,\omega) = \frac{-i}{Z}\sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} e^{-\beta E_{\mathbb{K}}}\langle \mathbb{K}|a_\nu|\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}\rangle \int d\omega\, e^{i\omega^+ t}\, e^{i(E_{\mathbb{K}}-E_{\mathbb{K}'})t} + \langle \mathbb{K}|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'|a_\nu|\mathbb{K}\rangle \int d\omega\, e^{i\omega^+ t}\, e^{-i(E_{\mathbb{K}}-E_{\mathbb{K}'})t}$$

$$\Rightarrow \boxed{G^R(\nu,\omega) = \frac{1}{Z}\sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} e^{-\beta E_{\mathbb{K}}}\left[\frac{\langle \mathbb{K}|a_\nu|\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}\rangle}{\omega + i\eta + (E_{\mathbb{K}} - E_{\mathbb{K}'})} + \frac{\langle \mathbb{K}|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'|a_\nu|\mathbb{K}\rangle}{\omega + i\eta - (E_{\mathbb{K}} - E_{\mathbb{K}'})}\right]}$$

essa é a chamada Representação de Lehmann de G^R

Trocando $\mathbb{K} \leftrightarrow \mathbb{K}'$ em um dos termos, podemos escrever:

$$G^R(\nu,\omega) = \frac{1}{Z} \sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} \frac{\langle \mathbb{K}|a_\nu|\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}\rangle}{\omega + i\eta + (E_{\mathbb{K}} - E_{\mathbb{K}'})} \left(e^{-\beta E_{\mathbb{K}}} + e^{-\beta E_{\mathbb{K}'}}\right)$$

Uma quantidade importante é a <u>função</u> <u>espectral</u> associada:

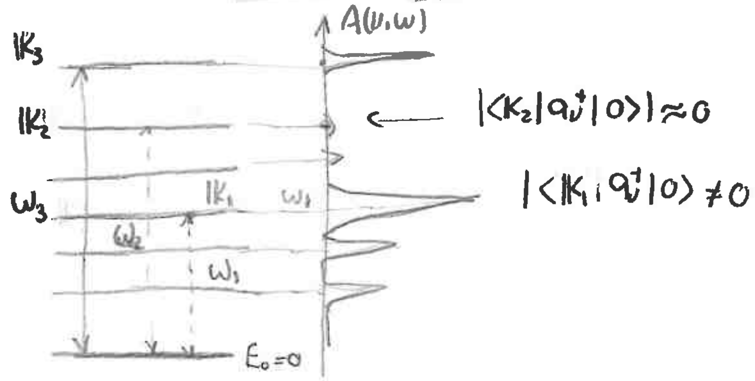
$$\boxed{A(\nu,\omega) \equiv -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} G^R(\nu,\omega)}$$

Para obter $\operatorname{Im} G^R$, usamos a identidade $\boxed{\frac{1}{\omega \pm i\eta} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) \mp i\pi\delta(\omega)}$

$$-\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} G^R(\nu,\omega) = \frac{1}{Z} \sum_{\mathbb{K}\mathbb{K}'} \langle \mathbb{K}|a_\nu|\mathbb{K}'\rangle\langle \mathbb{K}'|a_\nu^\dagger|\mathbb{K}\rangle \left(e^{-\beta E_{\mathbb{K}}} + e^{-\beta E_{\mathbb{K}'}}\right) \delta(\omega + (E_{\mathbb{K}} - E_{\mathbb{K}'}))$$

já que $\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) \to 0$. É instrutivo considerar o caso $T=0$ ($\beta \to \infty$) onde apenas o estado fundamental ($E_{\mathbb{K}} = 0$) "salva" os fatores de Boltzmann:

$$\boxed{A^{T=0}(\nu,\omega) = \frac{1}{Z} \sum_{\mathbb{K}'} |\langle \mathbb{K}'|a_\nu^\dagger|0\rangle|^2 \, \delta(\omega - E_{\mathbb{K}'})}$$



↑ picos p/ ω ressonantes com estados conectados ao estado fundamental pelo operador $a_\nu^\dagger$. $|\langle \mathbb{K}'|a_\nu^\dagger|0\rangle|^2 \to$ "força de oscilador".

Outro resultado interessante:

$$= (E_{k'} - E_k)$$

$$A(\nu,\omega) = \frac{1}{Z}\sum_{kk'} \langle k|a_\nu|k'\rangle\langle k'|a_\nu^\dagger|k\rangle\, e^{-\beta E_k}\left(1+e^{-\beta\omega}\right)\underbrace{\delta(\omega-(E_{k'}-E_k))}_{=\delta(E_k-E_{k'}+\omega)}$$

$$= \left(1+e^{-\beta\omega}\right)\frac{i}{2\pi}G^>(\nu,\omega) \Rightarrow \boxed{\left(1+e^{-\beta\omega}\right)^{-1}2\pi\, A(\nu,\omega) = iG^>(\nu,\omega)}$$

Identificando: $n_F(\omega) \equiv \left(1+e^{\beta\omega}\right)^{-1} \rightarrow n_F^{-1}(\omega) - 1 = e^{\beta\omega}$

$$\frac{1}{(1+e^{-\beta\omega})} = n_F(\omega)\, e^{\beta\omega}$$

$\Rightarrow \boxed{\left(1+e^{-\beta\omega}\right)^{-1} = \left(1-n_F(\omega)\right)}$ temos o "Teorema de flutuação-dissipação":

$$\boxed{iG^>(\nu,\omega) = 2\pi\left(1-n_F(\omega)\right)A(\nu,\omega)}$$

ou, usando $G^< = -e^{-\beta\omega}G^> = -\frac{n_F}{(1-n_F)}G^>$

$$\boxed{-iG^<(\nu,\omega) = 2\pi\, n_F(\omega)\, A(\nu,\omega)}$$

Pode-se ainda derivar as relações:

$$G^R(\nu,\omega) = \int d\omega' \frac{A(\nu,\omega')}{\omega-\omega'+i\eta}$$

$$G^A(\nu,\omega) = \int d\omega' \frac{A(\nu,\omega')}{\omega-\omega'-i\eta}$$

$\Rightarrow \boxed{G^R(\nu,\omega) = \left(G^A(\nu,\omega)\right)^*}$

na Rep. de frequência.

Em geral:

$$G^R(\nu,\nu',\omega) = \left(G^A(\nu,\nu',\omega)\right)^*$$