

# Efeito Hall quântico fracionário

Ricardo Costa de Almeida

Instituto de Física  
Universidade de São Paulo

*ricardo.costa.almeida@usp.br*

24 de novembro de 2015

# Sumário

- 1 Efeito Hall Clássico
- 2 Efeito Hall quântico inteiro
  - Descrição do fenômeno
  - Níveis de Landau
- 3 Efeito Hall quântico fracionário
  - Descrição do fenômeno
  - Funções de onda de Laughlin
  - Fermions Compostos
- 4 Considerações finais
- 5 Referências

# Efeito Hall Clássico

Descoberto por Edwin Hall em 1879.

- Placa condutora carregando uma corrente é submetida a um campo magnético perpendicular.
- Campo magnético leva a presença de diferença de potencial transversal a corrente.

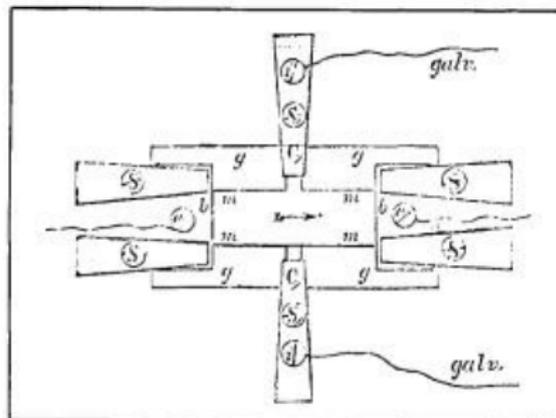


Figura: Arranjo experimental utilizado por Hall[1].

## Modelo teórico

O comportamento observado é explicado pelo electromagnetismo clássico. Verifica-se que o sistema pode ser descrito utilizando o tensor de resistividade:

$$E_{\mu} = \rho_{\mu\nu} J_{\nu}$$

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \rho_0$$

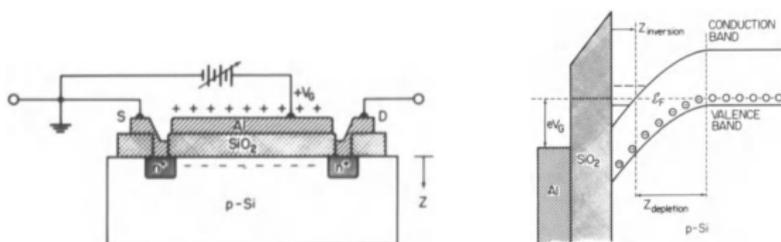
$$\rho_{yx} = -\rho_{xy} = \frac{B}{nec}$$

Em particular, a resistência Hall  $R_H = \frac{E_y}{J_x} = \frac{B}{nec}$  depende linearmente do campo magnético.

# Efeito Hall quântico inteiro

Experimento de K. von Klitzing(1980):

- Gás de eletrons bidimensional realizado em MOSFET de Si
- Baixa temperatura(1.5 K) e campo magnético forte(18 T)
- Medição da tensão Hall e longitudinal em função da tensão do gate.



**Figura:** Esquema representando transistor de efeito de campo e a estrutura de banda associada[2].

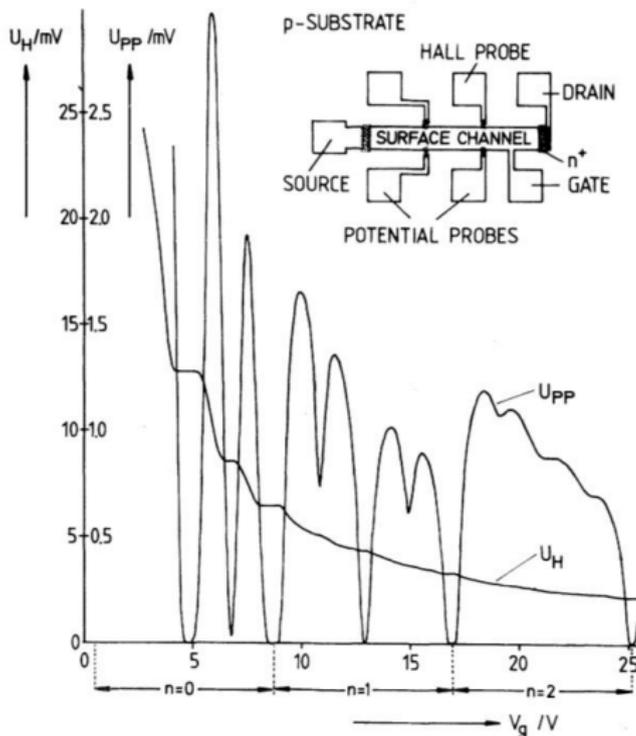


Figura: Resultados obtidos por K. von Klitzing em seu experimento[3].

É possível realizar o mesmo tipo de experimento variando a campo magnético no lugar da tensão do gate.

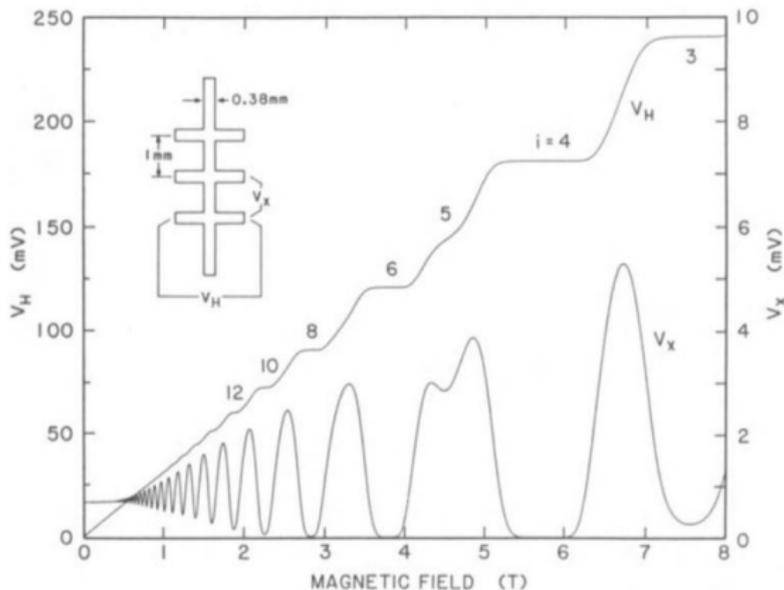


Figura: Experimento realizado em heteroestrutura GaAs-AlGaAs a 1.2 K[2].

## Novo fenômeno descoberto!

- Comportamento clássico só é válido para campos magnéticos baixos
- Resistência Hall quantizada:

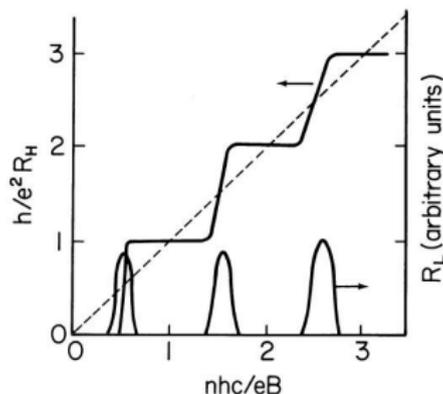
$$R_H = \frac{h}{\nu e^2}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

- Resistência longitudinal cai abruptamente nos degraus.
- Resistência depende do campo magnético e densidade de portadores de carga.

É possível verificar experimentalmente que a Resistência é determinada pelo fator de preenchimento:

$$\nu = \frac{nhc}{eB} = \frac{n}{B/\phi_0}$$

- Os degraus estão associados aos valores de  $\nu$  inteiros.
- Quantização da resistência é muito precisa.
- Qual a explicação para este efeito?



**Figura:** Gráfico ilustrando dependência da resistência Hall com  $\nu$  [2].

# Níveis de Landau

Elétron em sistema 2D submetido a campo magnético perpendicular:

$$H = \frac{\vec{\pi}^2}{2m}, \quad \vec{\pi} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

Tomando  $L = \sqrt{\frac{\phi_0}{2\pi B}}$  e observando que  $[\pi_x, \pi_y] = \frac{-i\hbar}{L^2}$  podemos definir:

$$\alpha = \frac{L}{\hbar\sqrt{2}}(\pi_x - i\pi_y) \rightarrow [\alpha, \alpha^\dagger] = 1$$

Finalmente:

$$H = \hbar\omega(\alpha^\dagger\alpha + 1/2), \quad \omega = \frac{eB}{mc}$$

Degenerescência ?

$$C = z + \frac{i\vec{\pi}}{m\omega}$$

$$\beta = \frac{1}{L\sqrt{2}}(C_x + iC_y) \rightarrow [\beta, \beta^\dagger] = 1$$

O operador  $\beta$  comuta com  $\alpha$ ,  $\alpha^\dagger$  e  $H$ .

Auto-estados de  $H$  são da forma:

$$|nm\rangle \propto (\alpha^\dagger)^n (\beta^\dagger)^m |00\rangle, E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

A degenerescência por unidade de área de cada nível de Landau é:

$$(2\pi L^2)^{-1} = \frac{B}{\phi_0}$$

- Para um sistema de muitos elétrons (não interagentes...):  $\nu$  corresponde a ocupação dos níveis de Landau.
- Quando  $\nu$  é inteiro a energia de Fermi se encontra em um gap entre dois níveis de Landau.
- Nesta situação o potencial químico  $\mu$  possui uma descontinuidade em relação a densidade de elétrons  $n$ .
- Isso explica o comportamento da Resistência Hall em termos dos níveis de Landau.
- Fenômeno pode ser explicado com elétrons não interagentes.

- Para um sistema de muitos elétrons (não interagentes...):  $\nu$  corresponde a ocupação dos níveis de Landau.
- Quando  $\nu$  é inteiro a energia de Fermi se encontra em um gap entre dois níveis de Landau.
- Nesta situação o potencial químico  $\mu$  possui uma descontinuidade em relação a densidade de elétrons  $n$ .
- Isso explica o comportamento da Resistência Hall em termos dos níveis de Landau.
- Fenômeno pode ser explicado com elétrons não interagentes.

Outros efeitos(desordem,impurezas...)

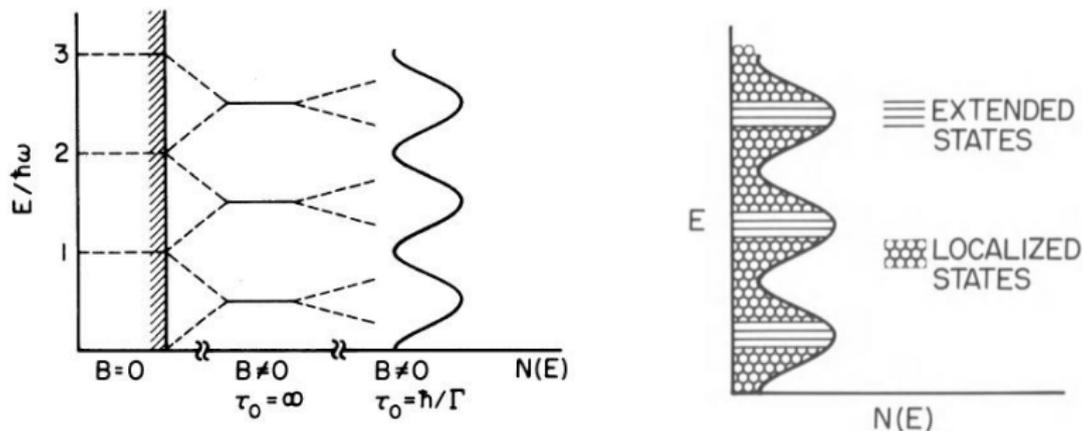
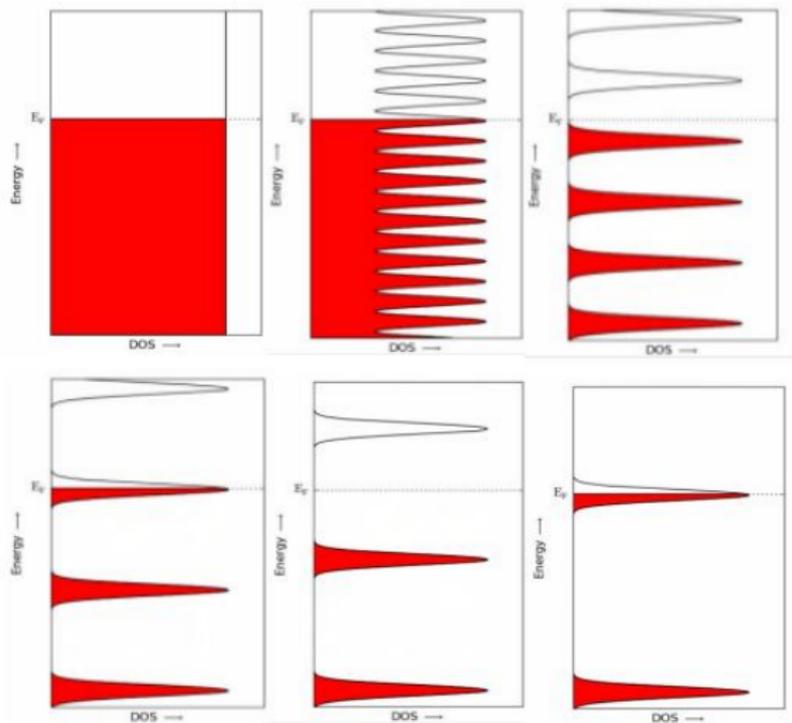


Figura: Contribuição de outros efeitos na densidade de estados[2].



# Efeito Hall quântico fracionário

Experimento de D.C. Tsui, H.L. Störmer e A.C. Gossard (1982):

- Gás de elétrons bidimensional realizado em heteroestruturas GaAs-AlGaAs de alta pureza.
- Baixas temperaturas ( $< 5$  K) e campos magnéticos fortes.
- Medição da tensão Hall e longitudinal em função do campo magnético.
- Verificaram a presença de um degrau associado a  $\nu = \frac{1}{3}$ .

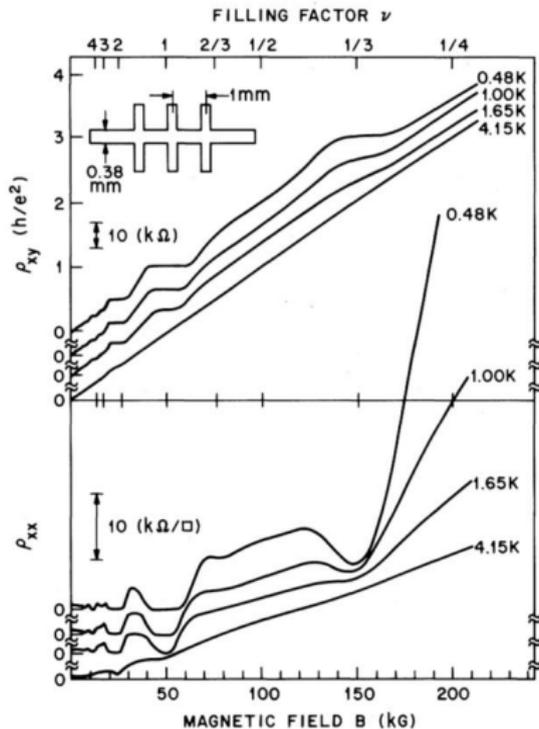


Figura: Resultados indicando a presença de degrau para  $\nu$  fracionário [4].

Posteriormente foram descobertos diversos degraus para  $\nu$  fracionário.

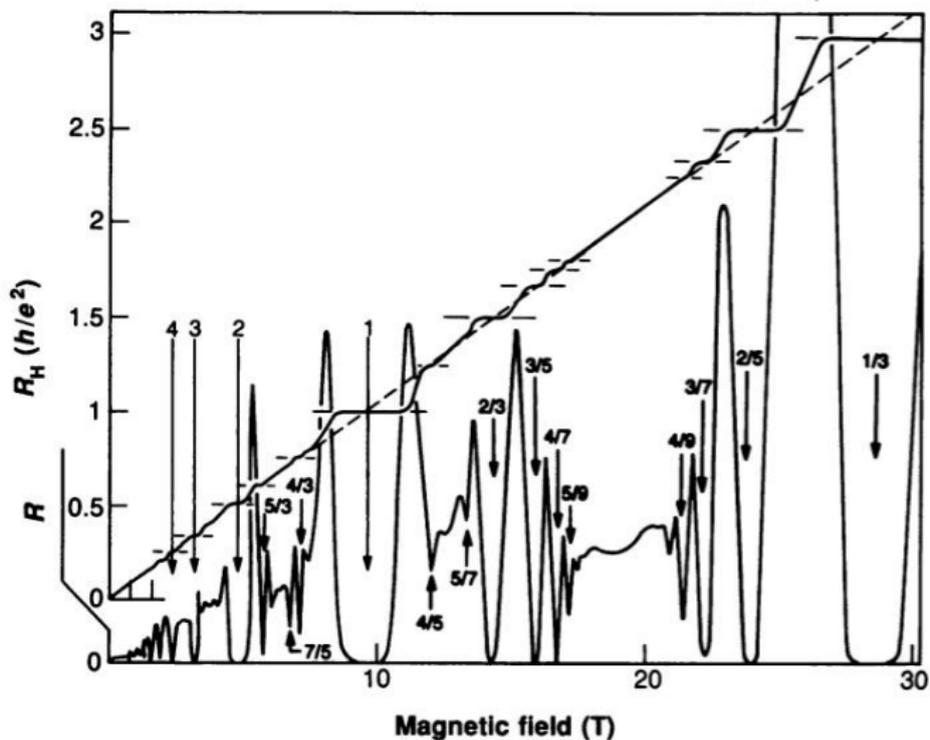


Figura: Resultados para  $\nu$  fracionário [5].

O modelo com elétrons não interagentes só consegue descrever o efeito para  $\nu$  inteiro.



É necessário levar a interação elétron-elétron em conta para descrever o caso fracionário. . .

Mas como fazer isso?

# Funções de onda de Laughlin

Funções de onda para o primeiro nível de Landau:

$$\psi_{0m}(z) \propto \bar{z}^m \exp\left(-\frac{|z|^2}{4L^2}\right)$$

Sistema com  $N$  elétrons no primeiro nível de Landau ( $\nu \leq 1$ ):

$$\psi(z_1 \dots z_N) = P(z_1 \dots z_N) \prod_k \exp\left(\frac{|z_k|^2}{4L^2}\right)$$

Onde  $P$  é um polinômio. Alguns argumentos heurísticos levam a considerar  $P(z_1 \dots z_N) = \prod_{j < k} (z_k - z_j)^m$  para  $m$  ímpar.

Essa é a função de onda  $\psi_m$  proposta por R.B. Laughlin para descrever o estado fundamental de sistemas que apresentam efeito Hall quântico para  $\nu = \frac{1}{m}$ .

Resultados Numéricos e modelos simplificados para interação elétron-elétron sugerem que a função de onda de Laughlin é uma boa aproximação.

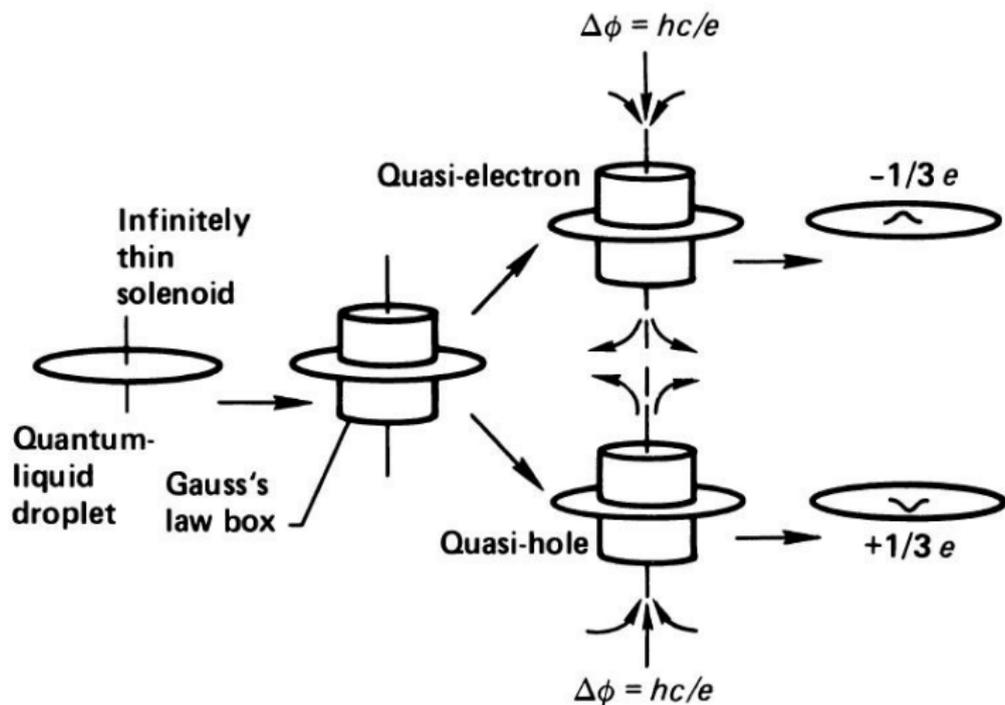
Prêmio Nobel de Física de 1990 para R.B. Laughlin, D.C. Tsui e H.L. Störmer:

**”for their discovery of a new form of quantum fluid with fractionally charged excitations.”**

Como caracterizar as excitações da função de onda de Laughlin ?

- Considere um solenoide bastante fino perfurando o sistema, o fluxo do solenoide varia adiabaticamente de  $\phi = 0$  até  $\phi = \phi_0$ .
- Pela lei de Faraday:  $E = \frac{1}{2\pi R c} \frac{d\phi}{dt}$  na direção azimutal.
- Corrente  $j_r = \nu \frac{e^2}{h} E$
- Carga ao final do processo  $Q = \nu \frac{e^2}{h} \frac{\phi_0}{c} = \nu e$

Ao final do processo obtemos um auto-estado excitado que interpretamos como uma quasi-partícula de carga  $\nu e$  localizada na posição em que o solenoide foi colocado.



**Figura:** Representação pictórica da formação de quasi-partículas através de um solenoide [2].

No caso do efeito Hall quântico inteiro observamos que os degraus estão associados a descontinuidade do potencial químico em relação a densidade de partículas, isto é relevante no caso fracionário ?

Compressibilidade de um fluido  $\kappa$  é dada por:

$$\kappa = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial P} \rightarrow \dots \rightarrow \kappa^{-1} = n^2 \frac{d\mu}{dn}$$

A descontinuidade corresponde a  $\kappa = 0$ , ou seja, um fluido incompressível.

A incompressibilidade é condição necessária para o efeito Hall quântico pois tem como consequências:

- O efeito ocorre caso as excitações gapless do bulk sejam localizadas e a desordem não seja muito grande.
- A presença de excitações gapless nas bordas do sistema.

Isso leva a interpretar os estados de efeito Hall quântico fracionário como fluidos incompressíveis de quasi-partículas de carga fracionária.

Mas as funções de onda de Laughlin só descrevem estados com  $\nu = \frac{1}{m}$ , e as outras frações?

A interação entre elétrons levou a um fluido de quasi-partículas fracionárias, por analogia a interação entre as quasi-partículas tem como consequência ...

Uma hierarquia de estados descrevendo fluidos incompressíveis que permite novas frações:

$$\frac{1}{m_1 + \frac{a_1}{m_2 + \frac{a_2}{m_3 + \dots}}}$$

Onde  $m_k$  são numero impares e  $a_k = \pm 1$ .

# Fermions Compostos

Considere um sistema de efeito Hall quântico no estado associado a  $\nu = p$  inteiro.

Suponha agora que consideremos uma partícula composta por um elétron e um número  $2m$  de quantas de fluxo magnético.

Esta nova partícula também é um fermion denominado fermion composto.

A ideia é que na fase fracionaria podemos tratar o sistema de eletrons interagentes como um sistema de fermios compostos não interagentes.

**”the FQHE of electrons is a manifestation of the IQHE of composite fermions.”**[8]

Temos o seguinte fator de preenchimento:  $(2m \pm p)^{-1} = \frac{p}{2mp \pm 1}$ .

# Considerações finais

- Descobertas de grande importância histórica
- Exemplo de física emergente("More is different")
- Cargas fracionarias → Anyons
- Ordem topológica → Novo paradigma para matéria condensada
- Estados com denominador par?

# Obrigado



Leadstone, G. S.

The discovery of the Hall effect  
Physics Education 14, 6(1979)



R.E.Prange and S.M.Girvin(eds.)

The Quantum Hall Effect  
2nd Edition, Springer-Verlag, New York(1990)



K.v. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper

New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant  
Based on Quantized Hall Resistance  
Phys. Rev. Lett. 45, 6(1980)



D.C. Tsui, H.L. Störmer, A.C. Gossard

Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit  
Phys. Rev. Lett. 48, 22(1982)



J.P. Eisenstein e H.L. Störmer

The Fractional Quantum Hall Effect  
Science 248(1990)



R. B. Laughlin

Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations

[Phys. Rev. Lett. 50, 1395\(1983\)](#)



F. D. M. Haldane

Fractional Quantization of the Hall Effect: A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States

[Phys. Rev. Lett. 51, 605\(1983\)](#)



J. K. Jain

Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect

[Phys. Rev. Lett. 63, 199\(1989\)](#)



Ady Stern

Anyons and the quantum Hall effect - a pedagogical review

[ArXiv:0711.4697](#)



A.H. MacDonald

Introduction to the Physics of the Quantum Hall Regime

[ArXiv:cond-mat/9410047](#)