

ORDEM TOPOLÓGICA E O MODELO DE KITAEV

Juan Pablo Ibieta-Jimenez

3 de Dezembro de 2015

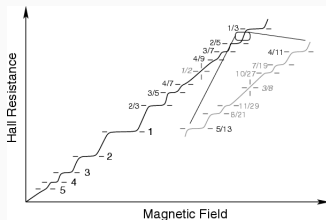
Seminário, IFUSP

Apresentar o conceito de *Ordem Topológica* por meio da descrição detalhada de um *Toy Model*.

1. Introdução.
2. Modelo de Kitaev.
3. Limite Topológico (Toric Code)
4. Estado(s) Fundamental(is).
5. Estados Excitados.
6. Considerações Finais.

INTRODUÇÃO

- As fases da matéria são (em geral) classificadas pelo esquema de quebra de simetria de Landau-Ginzburg $\rightarrow (G_H, G_{\Psi_0})$.
- Existem fases (quânticas) que não encaixam nessa descrição: IQHE, FQHE, Isolantes-supercondutores topológicos ...



- Distintas fases no FQHE não estão relacionadas com simetrias \implies Fase Topológica da Matéria.

FASE TOPOLÓGICA DA MATÉRIA

- Baixas energias \implies TQFT.
- Gap de energia entre o $|\Psi_0\rangle$ e os primeiros estados excitados.
- Apresenta **Ordem Topológica**.

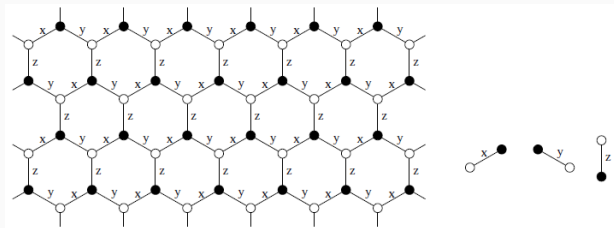
ORDEM TOPOLÓGICA

- Emaranhamento de longo alcance (LRE)
- Degenerescência de $|\Psi_0\rangle$ como função da topologia.
- Estados excitados \rightarrow quasi-partículas localizadas (2+1)D com estatística anyonica.
- Estados de borda.
- Correspondência "bulk-edge".
- ...

MODELO DE KITAEV

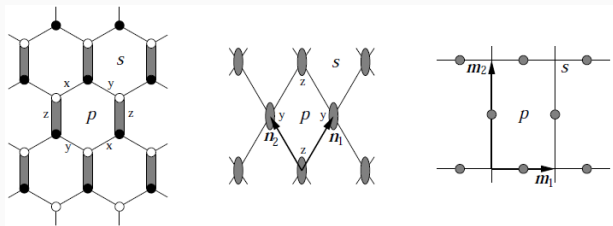
Spins 1/2 nos vértices de uma rede hexagonal 2D, a dinâmica é dada por:

$$H := -J_x \sum_{\text{x-links}} \sigma_j^x \sigma_k^x - J_y \sum_{\text{y-links}} \sigma_j^y \sigma_k^y - J_z \sum_{\text{z-links}} \sigma_j^z \sigma_k^z$$



LIMITE TOPOLÓGICO (TORIC CODE)

No caso em que $|J_z| \gg |J_x|, |J_y|$ o modelo pode ser mapeado a um modelo exactamente resolúvel na rede quadrada.



Para $J_x = J_y = 0$ o estado fundamental consiste em dímeros nos bonds z que podem ser mapeados às arestas de uma nova rede quadrada.

TORIC CODE

Rede \mathcal{L} 2D \Rightarrow o espaço de Hilbert total $\mathcal{H} := \bigotimes_{i \in \mathcal{L}} \mathcal{H}_i$.

$|\phi_1\rangle$ e $|\phi_{-1}\rangle$ base dos \mathcal{H}_i .

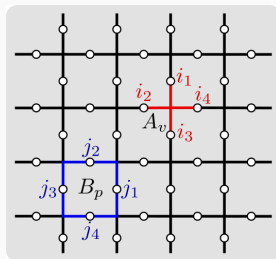
A Hamiltoniana:

$$H := - \sum_v A_v - \sum_p B_p.$$

Operadores locais:

$$A_v := \sigma_{i_1}^x \otimes \sigma_{i_2}^x \otimes \sigma_{i_3}^x \otimes \sigma_{i_4}^x,$$

$$B_p := \sigma_{j_1}^z \otimes \sigma_{j_2}^z \otimes \sigma_{j_3}^z \otimes \sigma_{j_4}^z.$$



TORIC CODE

Note que $[A_v, B_p] = 0, \forall p, v \in \mathcal{L}$. Além disso:

$$(A_v)^2 = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}, \quad (B_p)^2 = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}.$$

\Downarrow

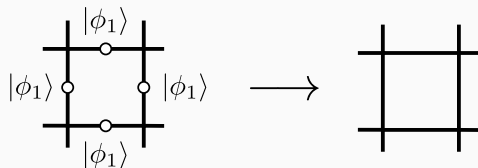
\Downarrow

$$A_v |\psi_v\rangle = \pm |\psi_v\rangle, \quad B_p |\psi_p\rangle = \pm |\psi_p\rangle.$$

Portanto, um estado fundamental $|\Psi_0\rangle$ é tal que:

$$A_v |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad B_p |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad \forall v, p \in \mathcal{L}.$$

Para ilustrarmos a ação dos operadores vamos assumir uma rep. gráfica dos estados, i.e.,

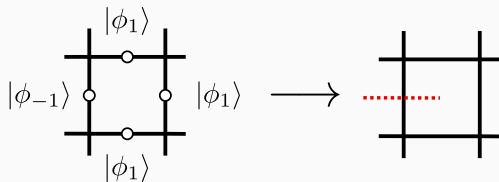


TORIC CODE: ESTADO FUNDAMENTAL

Portanto, um estado fundamental $|\Psi_0\rangle$ é tal que:

$$A_v |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad B_p |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad \forall v, p \in \mathcal{L}.$$

Para ilustrarmos a ação dos operadores vamos assumir uma representação gráfica dos estados, i.e.,

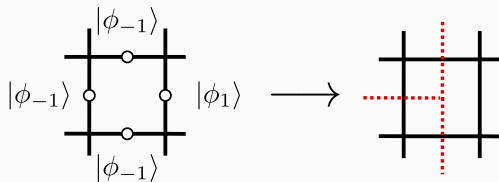


TORIC CODE: ESTADO FUNDAMENTAL

Portanto, um estado fundamental $|\Psi_0\rangle$ é tal que:

$$A_v |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad B_p |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad \forall v, p \in \mathcal{L}.$$

Para ilustrarmos a ação dos operadores vamos assumir uma rep. gráfica dos estados, i.e.,



TORIC CODE: ESTADO FUNDAMENTAL

A ação do operador de plaqueta:

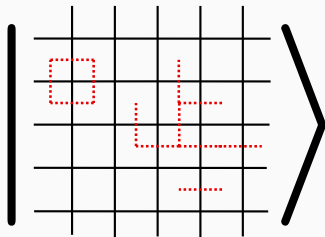
$$\begin{aligned} B_p \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \hline \hline \hline \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \hline \hline \hline \end{array} \right\rangle & B_p \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \vdots \hline \hline \hline \end{array} \right\rangle &= - \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \vdots \hline \hline \hline \end{array} \right\rangle \\ B_p \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

Enquanto o operador de vértice:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \end{array} \right\rangle &\xrightarrow{A_v} \left| \begin{array}{|c|} \hline \square \hline \hline \end{array} \right\rangle \\ \left| \begin{array}{|c|} \hline \vdots \hline \hline \hline \end{array} \right\rangle &\xrightarrow{A_v} \left| \begin{array}{|c|} \hline \square \hline \hline \end{array} \right\rangle = \left| \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

TORIC CODE: ESTADO FUNDAMENTAL

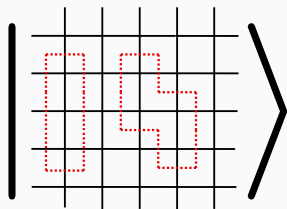
Um elemento da base (arbitrário) pode ser representado como:



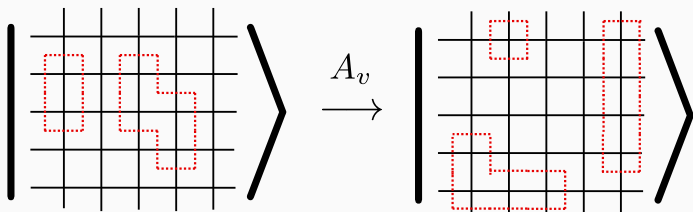
Note que este estado não é um estado fundamental pois não satisfaz a condição do operador de plaqueta.

TORIC CODE: ESTADO FUNDAMENTAL

Um estado que satisfaz a condição do B_p ($\forall p \text{ in } \mathcal{L}$) é por exemplo:



Mas, ele não é autoestado do operador de vértice A_v pois:



TORIC CODE: ESTADO FUNDAMENTAL

Portanto, o estado fundamental é uma soma sobre todas as possíveis ações dos A_v 's:

$$|\Psi_0\rangle \propto \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \text{Grid} \\ \text{No loops} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Grid} \\ \text{Square loop} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Grid} \\ \text{Complex loop} \end{array} \right\rangle + \\ \left| \begin{array}{c} \text{Grid} \\ \text{S-shaped loop} \end{array} \right\rangle + \dots \end{array} \right]$$

Este estado é interpretado como um **Loop Gas**. A forma explícita:

$$|\psi_0\rangle = \prod_v \frac{1}{2} (\mathbb{1} + A_v) \bigotimes_l |\phi_1\rangle_l.$$

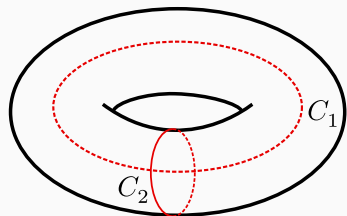
TORIC CODE: ESTADOS FUNDAMENTAIS

O estado $|\Psi_0\rangle$ é o único estado fundamental ?
Até agora nada foi dito sobre as condições de contorno. Em particular, quando o modelo é definido na superfície de um Toro mais 3 estados podem ser construídos.

$$|\Psi_1\rangle = X(C_1) |\Psi_0\rangle ,$$

$$|\Psi_2\rangle = X(C_2) |\Psi_0\rangle ,$$

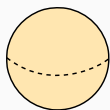
$$|\Psi_{1,2}\rangle = X(C_1)X(C_2) |\Psi_0\rangle .$$



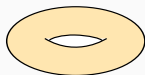
Em que $X(C) = \bigotimes_{l \in C} \sigma_l^x$, e C define um caminho da rede dual.

TORIC CODE: ESTADOS FUNDAMENTAIS

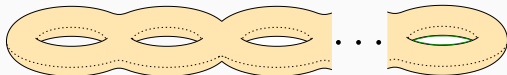
O estado $|\Psi_0\rangle$ é o único estado fundamental ?



$$GSD = 1$$



$$GSD = 2^2$$



$$GSD = 2^{2g}$$

TORIC CODE: ESTADOS EXCITADOS

Um estado excitado $|E\rangle$ é tal que para algum p ou $v \in \mathcal{L}$:

$$B_p |E\rangle = -|E\rangle ,$$

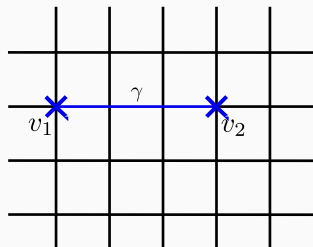
$$A_v |E\rangle = -|E\rangle .$$

CARGAS:

O estado $|E_v\rangle = Z(\gamma) |\Psi_0\rangle$
tem duas cargas pois:

$$A_{v_1} |E_v\rangle = -|E_v\rangle ,$$

$$A_{v_2} |E_v\rangle = -|E_v\rangle .$$



TORIC CODE: ESTADOS EXCITADOS

Um estado excitado $|E\rangle$ é tal que para algum p ou $v \in \mathcal{L}$:

$$B_p |E\rangle = -|E\rangle ,$$

$$A_v |E\rangle = -|E\rangle .$$

CARGAS:

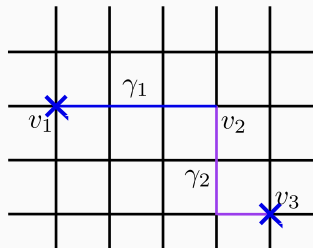
O estado $|E_v\rangle = Z(\gamma) |\Psi_0\rangle$

tem duas cargas pois:

$$A_{v_1} |E_v\rangle = -|E_v\rangle ,$$

$$A_{v_2} |E_v\rangle = -|E_v\rangle .$$

As cargas são livres!



TORIC CODE: ESTADOS EXCITADOS

Um estado excitado $|E\rangle$ é tal que para algum p ou $v \in \mathcal{L}$:

$$B_p |E\rangle = -|E\rangle ,$$

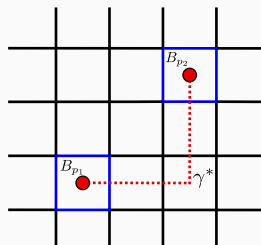
$$A_v |E\rangle = -|E\rangle .$$

FLUXOS:

O estado $|E_p\rangle = X(\gamma^*) |\Psi_0\rangle$
tem dois fluxos pois:

$$B_{p_1} |E_p\rangle = -|E_p\rangle ,$$

$$B_{p_2} |E_p\rangle = -|E_p\rangle .$$



TORIC CODE: ESTADOS EXCITADOS

Um estado excitado $|E\rangle$ é tal que para algum p ou $v \in \mathcal{L}$:

$$B_p |E\rangle = - |E\rangle ,$$

$$A_v |E\rangle = - |E\rangle .$$

FLUXOS:

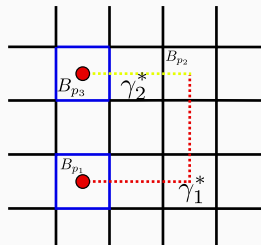
O estado $|E_p\rangle = X(\gamma^*) |\Psi_0\rangle$

tem dois fluxos pois:

$$B_{p_1} |E_p\rangle = - |E_p\rangle ,$$

$$B_{p_2} |E_p\rangle = - |E_p\rangle .$$

Os fluxos também são livres !



GENERALIZAÇÃO: QUANTUM DOUBLE MODELS

Considere G um grupo finito e discreto.

O espaço de Hilbert

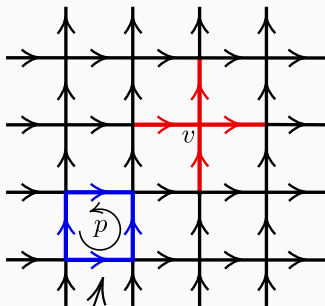
local (on-site) $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}(G)$.

$$\mathcal{H} := \bigotimes_i \mathcal{H}_i$$

Bases locais $\{|\phi_g\rangle\}$ em que $g \in G$. A dinâmica é dada por:

$$H := - \sum_v A_v - \sum_p B_p$$

Em particular se $G = \mathbb{Z}_2 \rightarrow$ Toric Code.



- O Toric Code é o exemplo mais simples de um sistema com ordem topológica e surgiu como uma tentativa de um sistema que permita a implementação de *computação quântica topológica*.
- Os quantum double models exibem quasi-partículas com estatística anyonica (abeliana e não abeliana).
- Conjectura: Em $(2+1)D$ a estatística das quasi-partículas classifica as distintas fases topológicas. Em $(3+1)D \Rightarrow$ as fases topológicas são classificadas pela estatística de "loops".
- Distintos modelos na rede podem ser usados para classificar as fases topológicas da matéria: QDMs, String-Nets.

OBRIGADO!