

Efeito Hall Quântico Fracionário

Ricardo Costa de Almeida
ricardo.costa.almeida@usp.br

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

1 Efeito Hall Clássico

Considere uma placa condutora, retangular por simplicidade, submetida a um campo magnético B perpendicular e homogêneo em toda a superfície. Se for estabelecida uma diferença de potencial entre dois lados opostos do retângulo uma corrente I fluirá de uma extremidade a outra, mas qual o efeito do campo magnético sobre este sistema ?

O campo magnético exerce uma força sobre os portadores de carga e faz que eles assumam trajetórias curvas, este processo leva a formação de uma diferença de potencial V_H transversal a corrente. No regime estacionário a força exercida por essa diferença de potencial deve cancelar a força exercida pelo campo magnético, desta maneira além da diferença de potencial original temos uma tensão transversal que da conta de todo efeito do campo magnético no sistema.

A situação descrita é precisamente o fenômeno que Edwin Hall investigava no final do século 19 com objetivo de verificar que os efeitos do campo magnético na corrente não se limitavam ao regime transiente. Em um serie de experimentos realizados entre 1879 e 1881 ele comprovou a presença da tensão transversal prevista pelo argumento exposto, em sua homenagem este fenômeno ficou conhecido como efeito Hall e a resistência associa a tensão transversal é chamada resistência Hall.

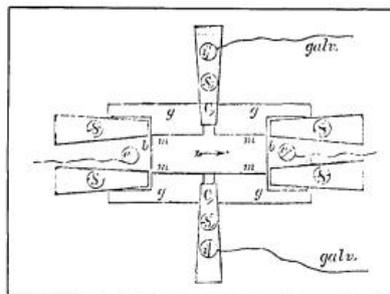


Figura 1: Arranjo experimental utilizado por Hall[1].

Não só Edwin Hall verificou a presença da tensão transversal mas também caracterizou a resistência Hall observando que havia uma dependência linear na intensidade do campo magnético. Este comportamento pode ser explicado impondo a condição de que a tensão Hall deve compensar os efeitos do campo:

$$F_B = F_H$$

$$\frac{e}{c}vB = e\frac{V_H}{L}$$

$$\frac{1}{c}\frac{I}{\eta eL}B = \frac{V_H}{L}$$

Onde η denota densidade de portadores de carga na placa, L sua largura e foi utilizado que $I = \eta evL$. Desta maneira verificamos que a resistência Hall é dada por:

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{\eta ec}$$

Note que o fenômeno pode ser descrito classicamente sem fazer qualquer referência estrutura microscópica do material em questão, mas como veremos esta não é toda a história por trás do efeito Hall.

2 Efeito Hall Quântico Inteiro

2.1 Descrição do fenômeno

Em 1980, um século depois da descoberta do efeito Hall, Klaus von Klitzing observou um desvio do comportamento clássico enquanto estudava a resistência Hall de um MOSFET de Si submetido a uma temperatura muito baixa ($\approx 1.5K$) e campo magnético muito forte ($\approx 18T$).

Em um MOSFET existem três camadas tipicamente, uma de semiconductor, uma isolante e uma que atua como contato metálico. Aplicar uma tensão, denominada tensão de gate, no contato metálico faz com que portadores de carga do semiconductor fiquem confinados na interface com o isolante formando um sistema 2D, variando esta tensão é possível controlar a densidade no sistema 2D formado.

Tomando proveito disso o experimento realizado consistia em variar a tensão de gate do MOSFET para manipular a densidade de portadores de carga no sistema em que se media a resistência Hall. De acordo com a descrição clássica do efeito Hall deveria se observar uma resistência Hall inversamente proporcional a tensão de gate:

$$R_H \propto \frac{1}{\eta} \propto \frac{1}{V_{gate}}$$

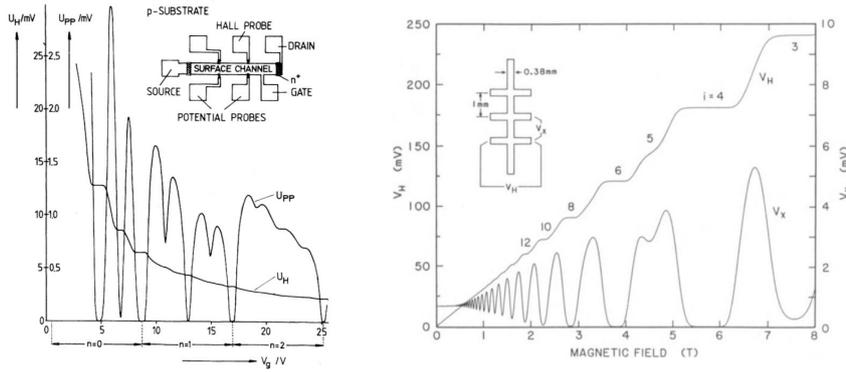


Figura 2: Esquerda: Resultados obtidos por K. von Klitzing em seu experimento[2]. Direita: Experimento realizado em heteroestrutura GaAs-AlGaAs a 1.2 K[3].

Entretanto os dados experimentais revelaram um comportamento caracterizado por uma serie de degraus ocorrendo em valores quantizados de resistência. Isto pode ser observado na figura 2, nela também temos os resultados de um experimento semelhante onde se variou o campo magnético e também foi verificada a presença dos degraus característicos.

De fato, a grandeza que determina a resistência Hall neste regime é o fator de preenchimento $\nu = \frac{\eta \hbar c}{eB} = \frac{\eta}{B/\phi_0}$, que corresponde a razão entre a densidade de portadores de carga e a densidade de quantas de fluxo magnético (ϕ_0 é o quanta de fluxo magnético). Em termos desta grandeza a resistência Hall é dada por:

$$R_H = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}$$

Entretanto o sistema só pode assumir valores que correspondem a ν inteiro, justamente a razão do padrão de degraus observado.

Este fenômeno ficou conhecido como efeito Hall quântico inteiro e rendeu o prêmio Nobel de 1985 a Klaus von Klitzing. Podemos listar algumas de suas características mais importantes:

- Comportamento clássico só é valido para campos magnéticos baixos e temperaturas altas.
- Resistência Hall quantizada:

$$R_H = \frac{h}{\nu e^2}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

- Resistência longitudinal cai abruptamente nos degraus.
- Quantização da resistência é muito precisa.

2.2 Níveis de Landau

Para tentar explicar o efeito Hall quântico para fatores de preenchimento inteiro vamos considerar um único elétron de um sistema 2D submetido a um campo magnético perpendicular. O Hamiltoniano neste caso é:

$$H = \frac{\vec{\pi}^2}{2m}, \quad \vec{\pi} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

Este Hamiltoniano pode ser diagonalizado exatamente mas para isso é necessário reescreve-lo como um Hamiltoniano do tipo oscilador harmônico. Definimos:

$$l = \sqrt{\frac{\phi_0}{\pi B}} \quad \omega = \frac{eB}{mc} \quad C = \vec{x} + \frac{i}{m\omega} \vec{\pi}$$

$$\alpha = \frac{l}{2\hbar} (\pi_x - i\pi_y) \quad \beta = \frac{1}{l} (C_x + iC_y)$$

É possível verificar que $[\alpha, \alpha^\dagger] = [\beta, \beta^\dagger] = 1$ e todos os outros comutadores entre $\alpha, \alpha^\dagger, \beta, \beta^\dagger$ são nulos. Além disso temos que:

$$H = \hbar\omega(\alpha^\dagger\alpha + 1/2)$$

Em particular, β e β^\dagger comutam com H.

Isso mostra que o espectro do sistema é da forma $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, os números quânticos n são denominados níveis de Landau. Utilizando os operadores β e as condições de fronteira e possível mostrar que cada nível de Landau tem degenerescência por unidade de área dado por B/ϕ_0 .

Podemos utilizar a descrição em termos de níveis de Landau para o sistema de muitos corpos quando a interação entre os elétrons for desprezível. Neste caso, a expressão da degenerescência mostra que o fator de preenchimento mede o quanto os níveis de Landau estão preenchidos.

A densidade de estados(DOS) associada aos níveis de Landau consiste em uma serie de deltas de Dirac nos valores E_n mas efeitos de desordem e impurezas tendem a alargar essa distribuição. A figura 3 ilustra uma DOS mais realística para um sistema de elétrons não interagentes submetidos a um campo magnético.

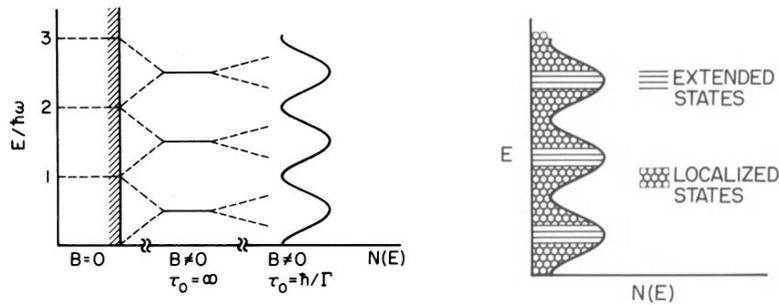


Figura 3: Contribuição de outros efeitos na densidade de estados[3].

Quando o fator de preenchimento assume valores inteiros os níveis de Landau correspondente estão completamente preenchidos e a energia de Fermi do sistema se encontra em um gap entre dois níveis. Isto corresponde a uma descontinuidade do potencial químico em relação a densidade de elétrons e faz que a a resistência do sistema não varie nesta situação, dando origem ao degraus observados. Note que neste caso o sistema funciona como um isolante por conta do gap de energia, entretanto isto só é valido para os estados do bulk do material e uma análise mais detalhada revela a presença de estados de borda responsáveis pela condução no sistema.

Desta maneira podemos identificar algumas propriedades necessárias para o aparecimento do efeito Hall quântico:

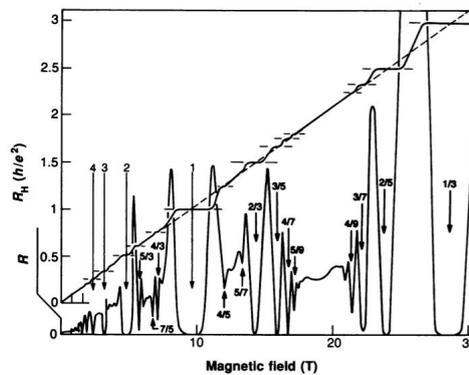
- Incompressibilidade do fluido associado aos elétrons, que corresponde a descontinuidade do potencial químico em relação a densidade.
- Excitações gapless do bulk são localizadas.
- Presença de excitações gapless de borda capazes de conduzir corrente elétrica.

Também é importante enfatizar que a explicação para efeito Hall quântico inteiro em termos dos níveis de Landau utiliza elétrons não interagentes e portanto não se trata de uma sistema fortemente correlacionado, como veremos um novo efeito surge quando a interação entre os elétrons se torna relevante.

3 Efeito Hall Quântico Fracionário

3.1 Descrição do fenômeno

Apenas 2 anos após a descoberta do efeito Hall quântico inteiro, D.C. Tsui, H.L. Störmer e A.C. Gossard verificaram a presença de um degrau $\nu = 1/3$ enquanto faziam medições de resistência Hall em heteroestruturas GaAs-AlGaAs de alta pureza. Posteriormente foram descobertos novos degraus associados a fatores de preenchimento fracionários como ilustrado na figura 4.



Este novo efeito, denominado efeito Hall quântico fracionário, se revelou ainda mais complexo que o efeito Hall quântico inteiro. Do ponto de vista experimental, realizar medições do efeito fracionário se mostrou mais difícil pela necessidade de amostras muito puras e campos magnéticos ainda mais fortes que os já utilizados para observar os degraus com ν inteiro. Enquanto isso, do ponto de vista teórico a dificuldade vinha da aparente necessidade de se levar em conta interações elétron-elétron para explicar os novos degraus.

3.2 Funções de onda de Laughlin

O modelo de elétrons não interagentes fornece um mecanismo para explicar o efeito Hall quântico inteiro mas não pode ir além. Por outro lado, as técnicas disponíveis não são capazes de resolver um sistema de elétrons-elétrons fortemente correlacionados indicando que uma derivação partindo diretamente deste ponto de vista não seria bem sucedida. Diante dessas dificuldades o primeiro passo em direção a uma explicação do efeito fracionário foi dado por R.B. Laughlin.

Para tentar descrever os degraus associados a frações do tipo $1/m$, com m ímpar, Laughlin propôs a seguinte função de onda para descrever o estado fundamental do sistema neste regime:

$$\psi_m(z_1 \dots z_N) = \prod_{j < k} (z_k - z_j)^m \prod_k \exp\left(-\frac{|z_k|^2}{4l^2}\right)$$

Para chegar a esta função de onda ele partiu da hipótese de que por corresponder a um preenchimento parcial do primeiro nível de Landau os elétrons neste regime deveriam estar em uma sobreposição de estados do primeiro nível:

$$\phi_{0m}(z) \propto \bar{z}^m \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l^2}\right)$$

Impondo uma série de condições obtidas heurísticamente, baseadas na fenomenologia do efeito Hall quântico, a essa possível combinação linear é possível chegar obter a função de onda de Laughlin. Também é possível verificar que esta função de onda é um candidato plausível para o estado fundamental através de simulações numéricas e 'toy models' para interação elétron-elétron.

Como já foi discutido, o efeito Hall quântico está associado a um fluido incompressível e é interessante caracterizar as partículas associadas a este fluido no caso da função de onda de Laughlin. Isto pode ser feito construindo operadores que criam excitações localizadas explicitamente e investigando o resultado de aplica-los na função de onda de Laughlin, entretanto vamos seguir uma outra abordagem que permite obter as propriedades das partículas mais facilmente através de um *gedankenexperiment*.

Considere um solenoide bastante fino que perfura o sistema inicialmente com fluxo $\phi = 0$. Aumentando este fluxo adiabaticamente até $\phi = \phi_0$ o sistema sai do estado fundamental para um estado excitado, por invariância de Gauge um solenoide de fluxo ϕ_0 é não pode ter efeito algum sobre as partículas do sistema. Portanto ao final deste processo um obtemos um estado do fluido com uma excitação localizada no local do solenoide.

Pela lei de Faraday o fluxo dependente do tempo gera um campo elétrico na direção azimutal $E = \frac{1}{2\pi Rc} \frac{d\phi}{dt}$ que por sua vez induz uma corrente. Por conta da incompressibilidade do estado fundamental a corrente gerada por este campo é na direção radial e calculada a partir da resistência Hall do sistema e permite calcular a carga injetado na região ocupada pelo solenoide:

$$Q = 2\pi R \int j_r dt = 2\pi R \int \nu \frac{e^2}{h} E dt = \nu \frac{e^2}{h} \frac{\phi_0}{c} = \nu e$$

A interpretação deste resultado é de que o estado obtido ao final descreve uma partícula de carga $\nu e = \frac{1}{m} e$, portanto uma quasi-partícula de carga fracionaria associada ao fluido incompressível.

Uma outra observação interessante que pode ser feita a partir do experimento mental envolvendo o solenoide é a razão da quantização do efeito Hall ser tão precisa, o valor do $\frac{e^2}{h}$ associado a resistência Hall é protegido pela simetria de Gauge.

A descrição fenomenológica proposta por Laughlin fornece um intuição sobre o efeito Hall quântico fracionário e permite uma explicação satisfatória para o fenômeno. Entretanto, esta descrição não é capaz de explicar estados $\nu = \frac{p}{q}$ quando p é diferente de 1. Para tratar destes casos, Halperin propôs uma hierarquia de estados obtidos a partir da função de onda de Laughlin.

Da mesma maneira que a interação entre elétrons levou a um fluido de quasi-partículas fracionarias a interação entre as quasi-partículas tem como consequência um novo fluido. O resultado seria uma hierarquia de estados descrevendo fluidos incompressíveis que permite novas frações:

$$\frac{1}{m_1 + \frac{a_1}{m_2 + \frac{a_2}{m_3 + \dots}}}$$

Onde m_k são numero impares e $a_k = \pm 1$.

Entretanto este procedimento não fornece informação sobre quais frações são dominantes (podem ser observadas mais facilmente), não explica todas as frações observadas e prevê frações que não foram observadas.

3.3 Fermions compostos

Em 1989 propôs um novo modelo para os estados fracionários que permite explicar todas as frações observadas de denominador impar utilizando um mecanismo análogo ao utilizado para explicar o efeito Hall quântico inteiro.

A ideia é utilizar novas partículas para descrever o sistema. Denominadas fermions compostos, essas partículas são compostas por um elétron e um numero $2m$ de quantas de fluxo magnético. Para realizar isso concretamente é necessário introduzir um novo potencial vetor a (potencial de Chern-Simons) através de uma transformação unitária, este potencial é dado por:

$$a(z) = -2m \frac{\phi_0}{2\pi} \sum_k \nabla \arg(z - z_k)$$

Associado a esse potencial temos um campo magnético fictício dado por $b(z) = \nabla \times a(z)$ e um campo magnético efetivo $\Delta B = B + \langle b \rangle$ que da origem a um

fator de preenchimento efetivo $p = \frac{\eta}{\Delta B/\phi_0}$. Na aproximação de campo médio temos $\langle b \rangle = -2m\eta\phi_0$ e podemos relacionar p com o fator de preenchimento real através de $\nu = \frac{p}{2mp+1}$.

A ideia do modelo é que o sistema de elétrons com interação elétron-elétron na presença de campo magnético pode ser tratado efetivamente como um sistema de fermions compostos independentes na presença do campo magnético efetivo. Desta maneira, os fermions compostos estariam sujeitos ao efeito Hall quântico inteiro que corresponde a valores de p inteiros, associados a valores de ν fracionários. Portanto o efeito Hall quântico fracionário para elétrons seria uma manifestação do efeito Hall quântico inteiro para fermions compostos.

A vantagem deste ponto de vista é que ele fornece um mecanismo unificado para tratar os efeitos Hall quântico, inteiro ou fracionário, e permite prever quais frações são dominantes e devem ser observadas com maior facilidade.

4 Considerações Finais

O efeito Hall quântico é um fenômeno de grande importância histórica no desenvolvimento da física de matéria condensada, seja no campo experimental ou teórico.

Ele ilustra muito bem como efeitos quânticos podem ter consequências macroscópicas bastante inesperadas e dão origem a fenômenos emergentes diversos, sendo um ótimo exemplo de 'More is different'. No caso do efeito fracionário vemos a complexidade que sistemas fortemente correlacionados podem apresentar e como é necessária uma proximidade com a fenomenologia para tratar estes sistemas teoricamente.

Alem de sua importância histórica e conceitual o efeito Hall continua sendo tópico de pesquisa ativo e um dos campos responsáveis por introduzir e popularizar conceitos como ordem topológica e anyons, centrais na pesquisa de matéria condensada atual.

Referências

- [1] Leadstone, G. S. The discovery of the Hall effect *Physics Education* 14, 6(1979)
- [2] K.v. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance *Phys. Rev. Lett.* 45, 6(1980)
- [3] R.E.Prange and S.M.Girvin(eds.) *The Quantum Hall Effect* 2nd Edition, Springer-Verlag, New York(1990)
- [4] D.C. Tsui, H.L. Störmer, A.C. Gossard Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit *Phys. Rev. Lett.* 48, 22(1982)
- [5] J.P. Eisenstein e H.L. Störmer *The Fractional Quantum Hall Effect* *Science* 248(1990)

- [6] R. B. Laughlin Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations Phys. Rev. Lett. 50, 1395(1983)
- [7] F. D. M. Haldane Fractional Quantization of the Hall Effect: A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States Phys. Rev. Lett. 51, 605(1983)
- [8] J. K. Jain Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect Phys. Rev. Lett. 63, 199(1989)
- [9] Ady Stern Anyons and the quantum Hall effect - a pedagogical review ArXiv:0711.4697
- [10] A.H. MacDonald Introduction to the Physics of the Quantum Hall Regime ArXiv:cond-mat/9410047