

# Relatividade

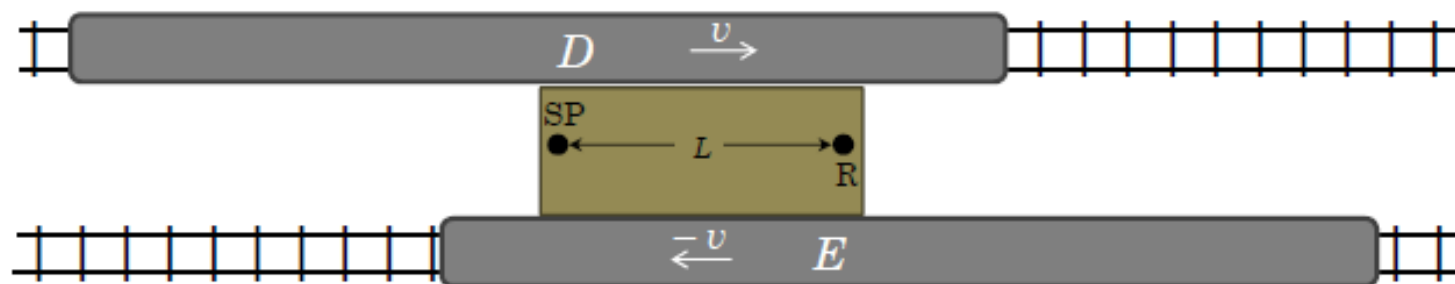
## O paradoxo dos gêmeos

Este raciocínio elaborado, sobre o paradoxo dos gêmeos, é bastante famoso. Vamos analisá-lo do ponto de vista das TL, enunciando: “Duas irmãs gêmeas, Joana e Maria, moram em SP, que supomos fixa em um referencial inercial. Um dia elas vão à estação de trem e Maria faz uma viagem de ida e volta a uma cidade R, enquanto Joana a espera em SP. Após o retorno de Maria, elas notam que Joana havia envelhecido mais do que Maria, devido ao efeito de dilatação do tempo”. O que é aparentemente paradoxal, neste caso, é que Maria parece ter se movido relativamente a Joana do mesmo modo que Joana moveu-se relativamente a Maria. Ao pensarmos assim parece haver uma simetria no problema, que não explica porque uma das irmãs possa acabar mais velha do que a outra. A solução desta aparente contradição está no fato de perceber que as situações das duas irmãs não são totalmente simétricas, pois Joana permanece sempre em um referencial inercial (SP), enquanto que o movimento de Maria é acelerado e ela precisa passar por três referenciais: SP, trem de ida ( $SP \rightarrow R$ ), trem de volta ( $R \rightarrow SP$ ), SP. Vamos supor que as viagens de ida e volta de Maria tenham sido efetuadas em dois trens muito longos. O trem D se move no sentido  $SP \rightarrow R$  (sistema  $S_D$ ) e o trem E se move no sentido  $R \rightarrow SP$  (sistema  $S_E$ ). Os módulos das velocidades dos dois trens, relativamente à Terra, são iguais a  $v$ .

# Relatividade

## O paradoxo dos gêmeos

A figura abaixo representa a visão de alguém no referencial da Terra, suposto inercial.



Vamos tomar as origens espaço-temporais nos três referenciais como sendo coincidentes e determinados no instante em que Maria pula da estação (SP) no trem D, que está indo para R:

**Evento A de referência:** Maria pula da estação para o trem D:

$$S_T: (0,0,0,0); \quad S_D: (0,0,0,0) \text{ e } S_E: (0,0,0,0)$$

**Evento B:** Chegada de Maria a R, onde ela pula diretamente para o trem de volta, sem parar na estação  $\Rightarrow$  Maria muda de trem ( $D \Rightarrow E$ ):

$$S_T: (L,0,0,L/v); \quad S_D: (x_D^B,0,0,t_D^B) \text{ e } S_E: (x_E^B,0,0,t_E^B)$$

**Evento C:** Maria chega a SP (pula do trem para a estação)

$$S_T: (0,0,0,2L/v); \quad S_D: (x_D^C,0,0,t_D^C) \text{ e } S_E: (x_E^C,0,0,t_E^C)$$

# Relatividade

## O paradoxo dos gêmeos

**Evento C:** Maria chega a SP:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_D^C = \gamma[x_T^C - vt_T^C] = \gamma[0 - v(2L/v)] \longrightarrow x_D^C = -2\gamma L \\ t_D^C = \gamma[t_T^C - (vx_T^C)/c^2] = \gamma[0 - (v/c^2)(2L/v)] \longrightarrow t_D^C = (2\gamma L)/v \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x_E^C = \gamma[x_T^C + vt_T^C] = \gamma[0 + v(2L/v)] \longrightarrow x_E^C = 2\gamma L \\ t_E^C = \gamma[t_T^C + (vx_T^C)/c^2] = \gamma[0 + (v/c^2)(2L/v)] \longrightarrow t_E^C = (2\gamma L)/v \end{array} \right.$$

O resultado  $x_E^C = x_E^B$  não é surpresa, já que Maria, uma vez no trem, sempre ficou parada na origem do sistema  $S_E$  durante a viagem de volta. O tempo total de volta é

$$\Delta t_M^{\text{volta}} = t_D^C - t_E^B = (2\gamma L)/v - [(\gamma L)/(v)][1 + v^2/c^2] = L/(\gamma v)$$

Como esperado,  $\Delta t_M^{\text{volta}} = \Delta t_M^{\text{ida}}$ . Assim, o tempo total para a viagem de Maria, tal como indicado no seu relógio, é

$$\Delta \tau_M = \Delta t_M^{\text{ida}} + \Delta t_M^{\text{volta}} = 2L/(\gamma v)$$

# Relatividade

## O paradoxo dos gêmeos

Por outro lado, o tempo total próprio decorrido para Joana, que ficou em SP ( $S_T$ ) esperando a irmã, é

$$\Delta\tau_J = 2L/v > \Delta\tau_M$$

Como o tempo de vida de uma pessoa é determinado pelo relógio que ela carrega, Joana ficou, de fato, mais velha do que Maria. Existe, portanto, uma assimetria real e concreta entre os tempos decorridos nas vidas de Joana e Maria, que se deve ao fato de esta última ter sofrido acelerações necessárias para poder sair e voltar para SP. A partir desta viagem, apesar de viverem felizes, Joana e Maria tiveram que comemorar seus aniversários em datas diferentes. Vamos avaliar quais deveriam ser os valores de  $L$  e  $v$  para que a diferença de idade entre as duas irmãs fosse de um dia, imaginando que a viagem de Maria durou um mês no referencial de Joana.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ mês} \cong 2,6 \times 10^6 \text{ s} \\ 1 \text{ dia} \cong 8,6 \times 10^4 \text{ s} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta\tau_J = (2L)/v = 2,6 \times 10^6 \text{ s} \\ \Delta\tau_J - \Delta\tau_M = \Delta\tau_J (1 - 1/\gamma) = 8,6 \times 10^4 \text{ s} \end{array}$$

$$L \cong 10^{14} \text{ m} \quad \text{e} \quad v \cong 0,26 \text{ c}$$

**Nota:** Não é possível, no universo em que vivemos, fazer uma viagem que se inicie e termine no mesmo ponto do espaço, sem algum tipo de aceleração. Em 1971, relógios atômicos de césio foram colocados em aviões, que circunavegaram a Terra nos sentidos horário e anti-horário. Suas marcações foram comparadas com as de relógios estacionários na Terra e as diferenças observadas estavam compatíveis com as previsões da teoria da relatividade.



# Transformações de Lorentz

## Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

1) Maria, no referencial  $S_M$ , observa João passando para a direita, com velocidade  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$ . Pedro também passa por Maria, com velocidade  $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}}$ . Qual a velocidade de Pedro relativamente a João?

Na mecânica clássica teríamos:  $\vec{u}_J^{\text{Pedro}} = \vec{u}_M^{\text{Pedro}} - \vec{v} = (u - v, 0, 0)$

Diferentemente da mecânica clássica, na relatividade temos:

$$\left. \begin{aligned} u_J^x &= \frac{u - v}{1 - (uv)/c^2} \\ u_J^y &= u_J^z = 0 \end{aligned} \right\} \vec{u}_J = \left( \frac{u - v}{1 - (uv)/c^2}, 0, 0 \right)$$

Consideremos que, no referencial de Maria, João se move com velocidade  $\mathbf{v} = 3c/5 \hat{\mathbf{i}}$  e Pedro com velocidade  $\mathbf{u} = -4c/5 \hat{\mathbf{i}}$ . A velocidade de Pedro relativamente a João será:

Na mecânica clássica

$$\vec{u}_J = \left( -\frac{7c}{5}, 0, 0 \right)$$

módulo maior que  $c$

Na relatividade

$$\vec{u}_J = \left( -\frac{35c}{37}, 0, 0 \right)$$

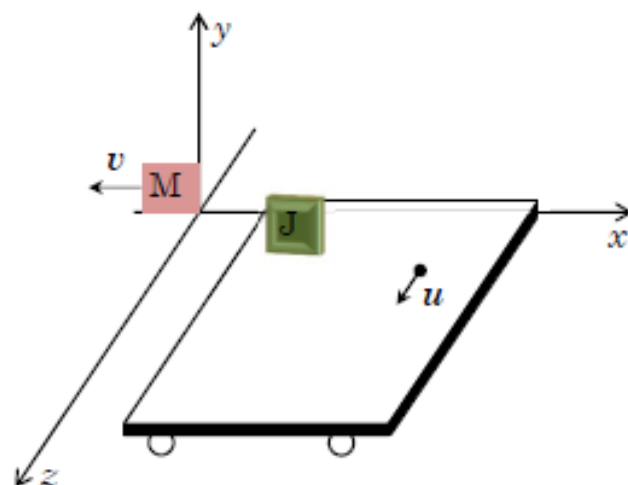
módulo menor que  $c$

Este exemplo mostra que o cálculo relativístico é consistente com o fato de que o módulo da velocidade de qualquer corpo tem que ser sempre menor que  $c$ .

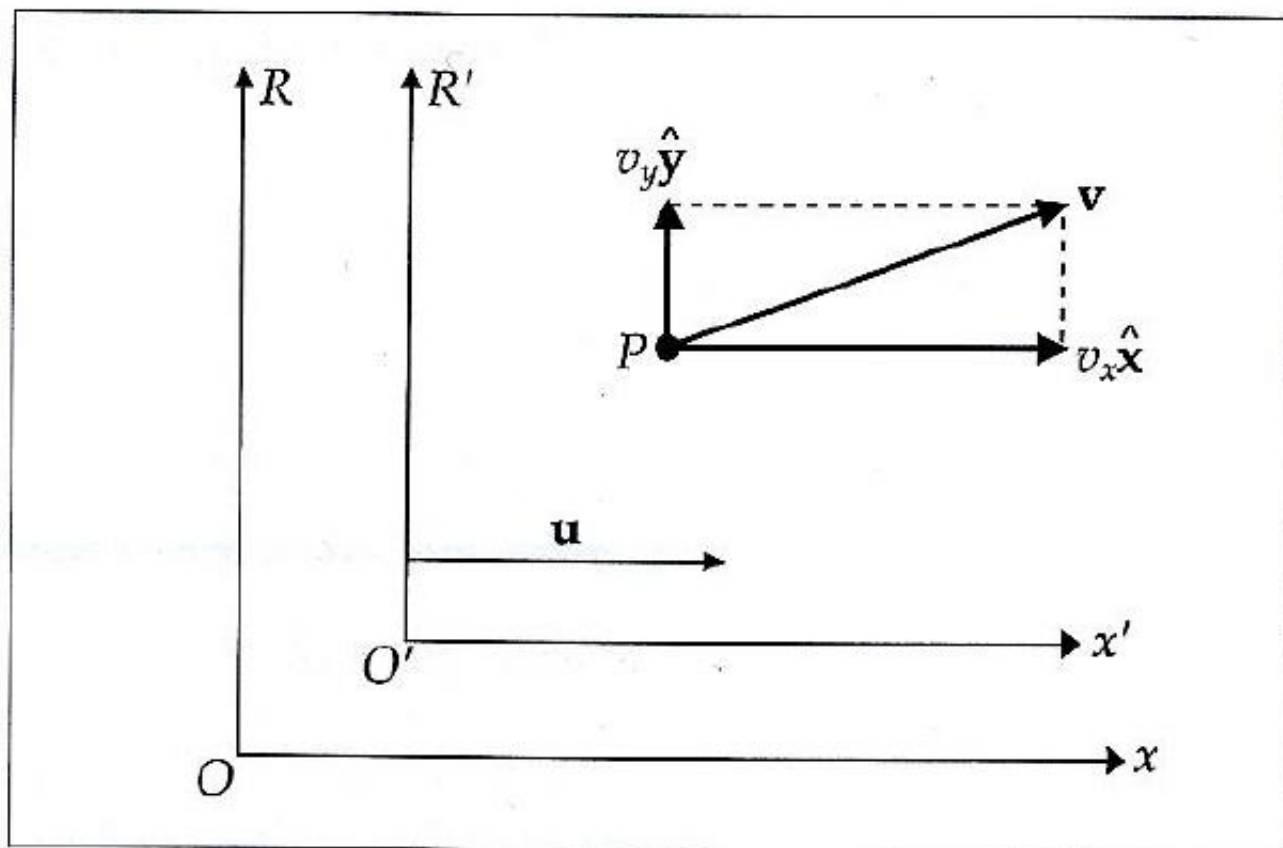
# Transformações de Lorentz

## Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

2) João está numa plataforma que se move paralelamente ao eixo  $x$  com velocidade  $\mathbf{v} = v\hat{i}$  em relação a Maria. Sobre essa plataforma, existe um corpo que se move segundo o eixo  $z$ , com velocidade  $\mathbf{u}_J$  em relação a João. A figura mostra os movimentos de Maria e do corpo, vistos por João.



Quais são as previsões clássica e relativística para a velocidade do corpo relativamente a Maria? Na mecânica clássica temos  $\mathbf{u}_M = (v, 0, u)$ , enquanto que na relatividade, temos que  $\mathbf{u}_M = (v, 0, u/\gamma)$ . Se adotarmos, por exemplo,  $v = 3c/5$  e  $u = 4c/5$ , teremos classicamente que  $\mathbf{u}_M = (3c/5, 0, 4c/5)$ , cujo módulo é  $|\mathbf{u}_M| = c$  e, relativisticamente,  $\mathbf{u}_M = (3c/5, 0, 16c/25)$ , cujo módulo é  $|\mathbf{u}_M| = \sqrt{481} c / \sqrt{625} \cong 0,88c$ . Este exemplo mostra, novamente, que o cálculo relativístico é consistente com o fato de que o módulo da velocidade de qualquer corpo tem que ser sempre menor que  $c$ .



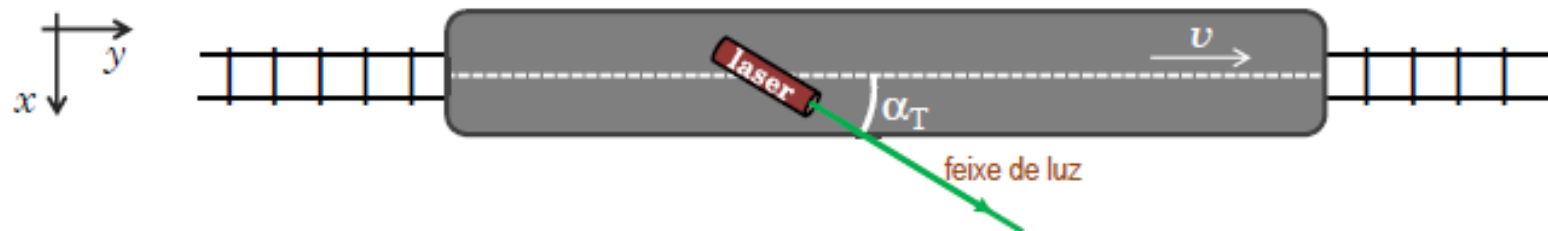
**Figura 3.6**

Os referenciais inerciais  $R$  e  $R'$  têm velocidade relativa  $u$ . A velocidade da partícula  $P$  no referencial  $R$  é  $\mathbf{v}(v_x, v_y)$  e no referencial  $R'$  é  $\mathbf{v}'(v'_x, v'_y)$ .

# Transformações de Lorentz

## Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

**3) A velocidade da luz:** No interior de um trem existe uma fonte de laser, que emite um feixe horizontal, formando um ângulo  $\alpha_T$  com o eixo do trem. A figura mostra o laser e seu feixe, vistos do referencial do trem. Quando o trem se move com velocidade  $v$ , qual é a velocidade da luz em relação ao solo?



Neste tipo de questão, é conveniente pensarmos no feixe de luz emitido pelo laser como sendo composto por muitos fótons, cada um deles com velocidade  $c_T = (c \sin \alpha_T, c \cos \alpha_T, 0)$ , no referencial do trem. A velocidade de cada fóton, em relação ao solo, deve ser obtida pelas relações relativísticas entre velocidades. Assim:

$$c_S^x = \frac{c \sin \alpha_T}{\gamma (1 + v \cos \alpha_T / c)}$$

$$c_S^y = \frac{c \cos \alpha_T + v}{1 + v \cos \alpha_T / c}$$

$$c_S^z = 0$$



# Transformações de Lorentz

## Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

Para interpretar o resultado, calculemos, inicialmente, o módulo do vetor  $c_S$ :

$$|c_S|^2 = \frac{(1 - v^2/c^2) c^2 \sin^2 \alpha_T + (c \cos \alpha_T + v)^2}{(1 + v \cos \alpha_T / c)^2} = c^2$$

Assim, o módulo da velocidade da luz, em relação ao solo é também igual a  $c$ , independente dos valores adotados para  $v$  e  $\alpha_T$ . Este resultado indica que as regras de adição de velocidades obtidas das TL são compatíveis com o segundo postulado da relatividade, segundo o qual o módulo da velocidade da luz no vácuo é independente do referencial inercial. É interessante notar que a direção da velocidade da luz depende do referencial. Para determinar o ângulo  $\alpha_S$ , entre o feixe de luz e o eixo  $y$ , no referencial do solo, escrevemos  $c_S = (c \sin \alpha_S, c \cos \alpha_S, 0)$ , e comparamos com as equações anteriores:

$$\left. \begin{aligned} c_S^x = c \sin \alpha_S &= \frac{c \sin \alpha_T}{\gamma (1 + v \cos \alpha_T / c)} \Rightarrow \sin \alpha_S = \frac{\sin \alpha_T}{\gamma (1 + v \cos \alpha_T / c)} \\ c_S^y = c \cos \alpha_S &= \frac{c \cos \alpha_T + v}{1 + v \cos \alpha_T / c} \Rightarrow \cos \alpha_S = \frac{\cos \alpha_T + v}{1 + v \cos \alpha_T / c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

# Transformações de Lorentz

## Relações relativísticas entre velocidades: Exemplos

Utilizando as duas equações anteriores encontramos que o ângulo  $\alpha_S$ , entre o feixe de luz e o eixo  $y$ , no referencial do solo, fica:

$$\alpha_S = \arctg \left[ \frac{\text{sen} \alpha_T}{\gamma (\text{cos} \alpha_T + v/c)} \right]$$

Nos casos particulares em que o feixe de luz é paralelo ou antiparalelo à velocidade do trem, temos que  $\alpha_T = 0$  e  $\alpha_T = \pi$  e os vetores velocidade da luz são dados, respectivamente, por  $c_T = c_S = (0, c, 0)$  e  $c_T = c_S = (0, -c, 0)$ . Por outro lado, se o laser é orientado perpendicularmente ao eixo do trem, teremos  $\alpha_T = \pi/2$  e, portanto, os dois vetores são diferentes, apesar de terem módulos iguais:  $c_T = (c, 0, 0)$  e  $c_S = (c/\gamma, v, 0)$ .

## Relatividade: O Efeito Doppler da Luz

Um efeito bastante importante da dilatação do tempo é um deslocamento no valor da frequência da onda luminosa emitida por átomos em repouso em relação àquela emitida por átomos em movimento. Este fenômeno, conhecido como efeito Doppler, foi introduzido quando estudamos ondas sonoras, onde o movimento da fonte em relação ao meio de propagação da onda pode ser distinguido do movimento do observador com respeito ao meio. No entanto, no caso da luz, como ela não necessita de um meio para se propagar e em qualquer referencial sua velocidade é  $c$ , não podemos distinguir se o movimento é da fonte ou do observador. Assim, se a velocidade relativa entre a fonte de luz e o observador é  $v$ , a frequência medida pelo observador é:

$$\nu_{\text{observador}} = \frac{\sqrt{1 \pm v/c}}{\sqrt{1 \mp v/c}} \nu_{\text{fonte}}$$

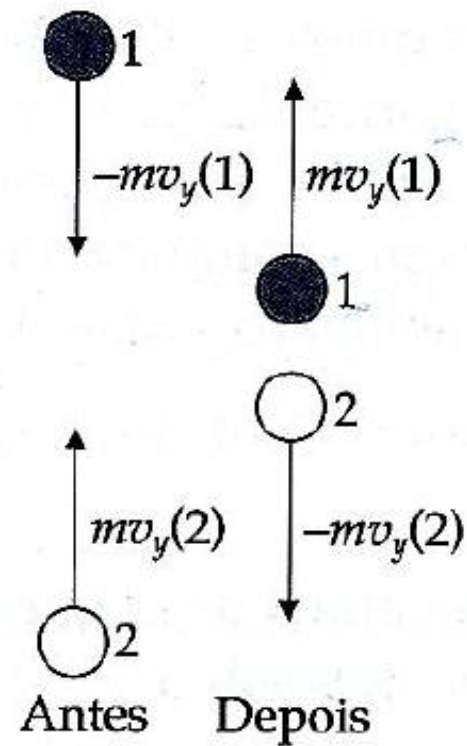
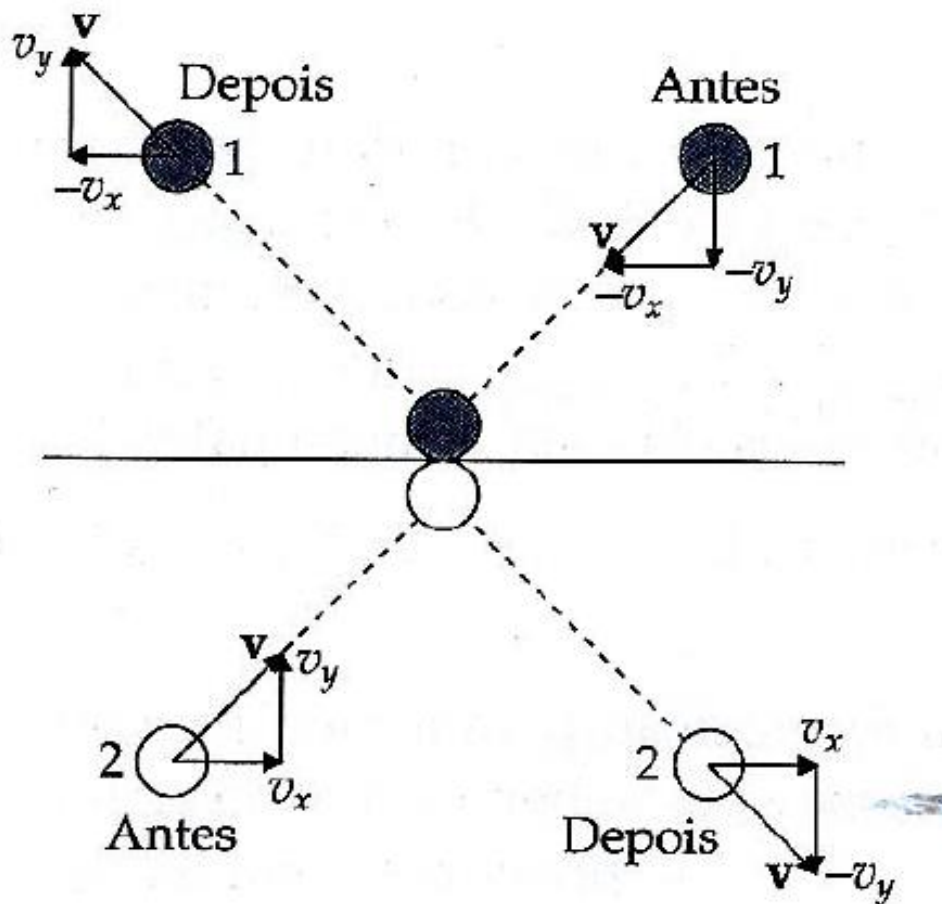
**sinais superiores:** aproximação  $\Rightarrow \nu_{\text{observador}} > \nu_{\text{fonte}}$

**sinais inferiores:** afastamento  $\Rightarrow \nu_{\text{observador}} < \nu_{\text{fonte}}$

frequência da fonte no referencial em repouso

O mais espetacular uso do efeito Doppler relativístico é a medida nos deslocamentos da frequência da luz emitida por objetos astronômicos, tais como uma galáxia. Linhas espectrais encontradas na região extrema do ultra-violeta para galáxias em repouso em relação à Terra são deslocadas  $\approx 100 \text{ nm}$  para a região do vermelho (red shift) para galáxias distantes, mostrando que elas estão se afastando da Terra. Hubble fez inúmeras medidas deste red shift para confirmar que a maioria das galáxias estão se afastando, indicando que o Universo está se expandindo.

# Referencial R do Laboratório





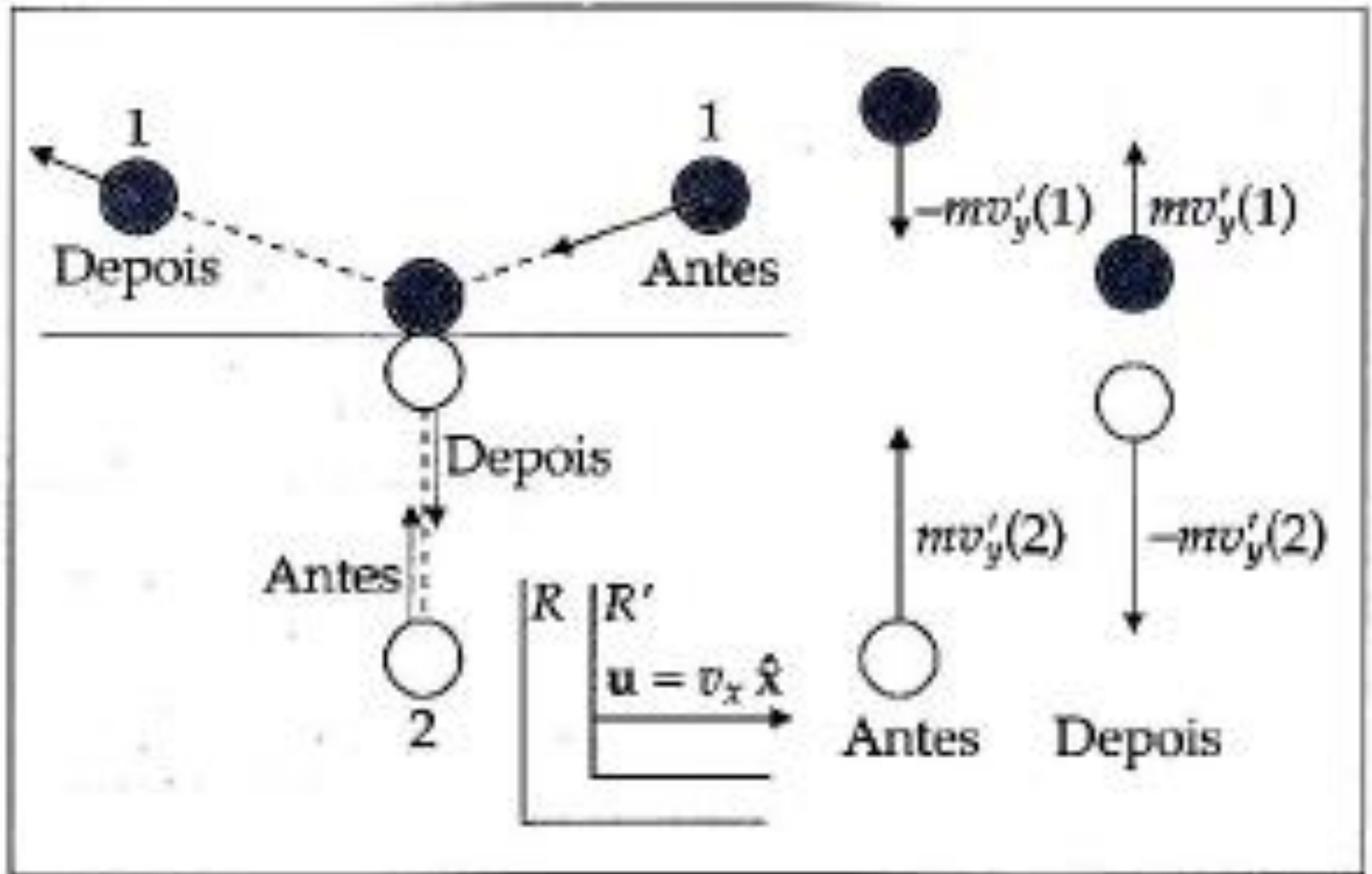
$$v'_x(1) = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{-u - u}{1 - \frac{u}{c}(-u)} = \frac{-2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

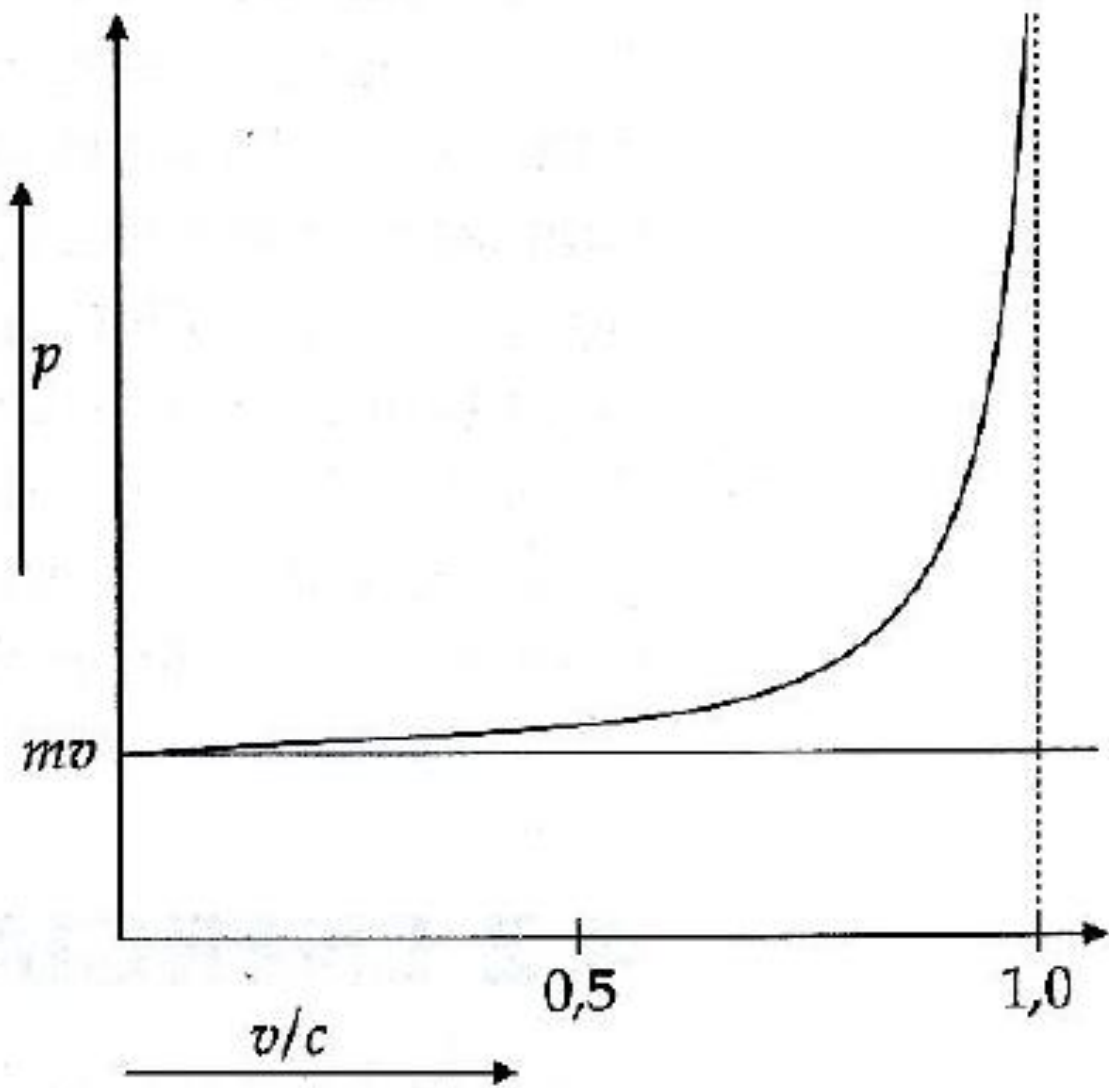
**Tabela 4.1**

| Ref. | Antes                                       |                                                                     | Depois                                      |                                                                     |
|------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $R$  | $-v_x(1)$                                   | $-v_y(1)$                                                           | $-v_x(1)$                                   | $v_y(1)$                                                            |
|      | $v_x(2)$                                    | $v_y(2)$                                                            | $v_x(2)$                                    | $-v_y(2)$                                                           |
| $R'$ | $v'_x(1) = \frac{-2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$ | $v'_y(1) = \frac{-v_y(1)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}$ | $v'_x(1) = \frac{-2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$ | $v'_y(1) = \frac{v_y(1)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}$  |
|      | $v'_x(2) = 0$                               | $v'_y(2) = \frac{v_y(2)}{\gamma \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}$  | $v'_x(2) = 0$                               | $v'_y(2) = \frac{-v_y(2)}{\gamma \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}$ |



# Referencial R'





# Efeito Cherenkov

